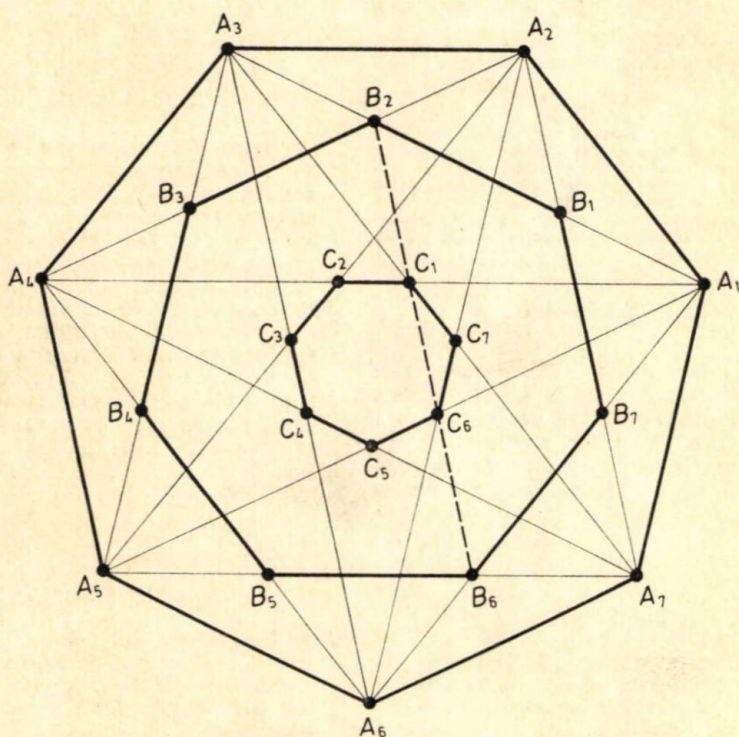


A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



1984. február * XXXI. évfolyam

1

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAI LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNA, SZTANÓ TAMÁSNA

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

84-5188 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalvá-
nyon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi
jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közzöljük lakásuk és munkahelyük pontos
címét is!

TARTALOM

<i>Előd Istvánné:</i> Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?	1
<i>Novák Lászlóné:</i> Beszámoló az Úttörő-matematikások 1983. évi vetélkedőjének országos fordulójáról	2
<i>Dr. Koller Lászlóné:</i> Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából. (Kísérleti anyag, III. osztály 2. rész.)	11
<i>Ujvári István:</i> A matematikai tehetségek gondozásának szakközépiskolai sajátosságai	19
FELADATOK	28

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Элöd Иштванне:</i> Что издано до сих пор из учебных программ, учебников и сопровождающих пособий для начальной и средней школы?	1
<i>Новак Ласлоне:</i> О всесоюзном туре соревнования математиков-пионеров 1983. г.	2
<i>д-р Коллер Ласлоне:</i> Система программных требований по математике для профтехучилищ. (Экспериментальный материал, кл. III, часть 2.)	11
<i>Уйвари Иштван:</i> Свойственности занятия с математическими талантами в техникумах	19
ЗАДАЧИ	28

INHALT

<i>Frau Ilona Elöd (geb.: Bakos):</i> Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen?	1
<i>Frau Borbála Novák (geb.: Kapczár):</i> Bericht über die Landesrunde des Wettstreites der Pionier-Mathematiker im Jahre 1983	2
<i>Frau Marianne Koller (geb.: Satori):</i> Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen. (Versuchsmaterial, III. Klasse 2. Teil.)	11
<i>Ujvári, István:</i> Über die Eigentümlichkeiten der Förderung der mathematisch talentierten Schüler in den Fachmittelschulen	19
AUFGABEN	28

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

A Matematika Tanítása 1982. februári és 1983. februári számában levő cikkek az 1982. szeptemberig megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét tartalmazzák. Az alábbiakban csak az azóta megjelent új kiadványok jegyzékét közöljük.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. Alsó tagozat

1.1.2. Új tanterv

Matematika-feladatgyűjtemény 1. osztály. Szerkesztette: Oravecz Pálné. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 118. (1983-tól.)

Matematika-feladatgyűjtemény 2. osztály. Szerkesztette: Oravecz Pálné. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 218. (1983-tól.)

1.3. Dolgozók általános iskolája

Alapismereti tankönyv I—II. évfolyam. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: D 7087. (1983-tól.)

Feladatlapok az alapismereti tankönyvhöz, I—II. évfolyam. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: D 7087/F. (1983-tól.)

Útmutató az alapismereti tankönyvhöz és a feladatlapok használatához, I—II. évfolyam. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 91 504. (1983-tól.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. Szakmunkásképző iskola

Bige Istvánné: Matematika munkalapok I. Kiegészítő. I. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 12 502/M/K. (1983-tól.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok II. Kiegészítő. II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 12 602/M/K. (1983-tól.)

Szabó Sándorné: Matematika munkalapok III. Kiegészítő. III. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 12 702/M/K. (1983-tól.)

Bedő László: Kiegészítő módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 84 097. (1983-tól.)

2.2. Szakközépiskola

Herczeg János: Matematika IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 14 402/II. (1982-től.)

Csaba Miklós—Nagy Imre—Szabó Kálmán—Vancsura Zsolt: Számítógépek rendszertechnikája II. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 58 060. (1983-tól.)

Dr. Könyves Tóth Kálmán—Dr. Szelezsán Jánosné—Dr. Kisdi Dávid: Programozás II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: 58 061. (1983-tól.)

2.3. Gimnázium

Dr. Devecseri Lászlóné—Máté András—Ruzsa Imre: Logika (fakultatív). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. R. sz.: 13 354. (1982-től.)

3. DOLGOZÓK ISKOLÁJA

3.1. Szakközépiskola

3.1.1. Szakmunkások szakközépiskolája

Czapáry Endre: Matematika III. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: D 12 702. (1983-tól.)

3.1.2. Dolgozók szakközépiskolája

Ujvári István—Kun Péter: Matematika II. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: D 14 202. (1983-tól.)

3.2. Gimnázium

Dr. Koller Lászlóné: Matematika II. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. R. sz.: D 13 202. (1983-tól.)

NOVÁK LÁSZLÓNÉ

osztályvezető-helyettes

Országos Pedagógiai Intézet

Beszámoló az Úttörő-matematikuskok 1983. évi vetélkedőjének országos fordulójáról

Az 1982—83. tanévben az úttörő-matematikuskok vetélkedőjének országos fordulójára Csillebércen került sor 1983. június 21—24. között az egyéb úttörő-vetélkedőkkel, -szemlékkel egyidőben. A verseny két napig tartott. Az első napon 101 hetedikes és 81 nyolcadikos vetélkedett, és ennek alapján került a döntőbe 46 hetedikes és 44 nyolcadikos, akik között a második napon dőlt el a sorrend. A sorrend megállapításánál figyelembe vettük az első napi teljesítményt is.

A feladatok és megoldásuk

(A leírt megoldásmódok a legeredményesebben szereplő pajtások gondolatait tartalmazzák.)

7. osztály

Az első napi feladatok

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyik a pozitív egyjegyű egész számok mindegyikével osztható?

Megoldás:

A pozitív egyjegyű egész számok:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Ezek közül az összetett számok törztényezői alakja:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2; \quad 6 = 2 \cdot 3; \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3; \quad 9 = 3 \cdot 3 = 3^2.$$

Ezért a pozitív egyjegyű egész számok legkisebb közös többszöröse:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 90 %.

2. 140 cm hosszú drótból olyan négyzetes oszlop vázát akarjuk elkészíteni, amelyeknek oldalélei 5 cm-rel hosszabbak az alapéleknél. Mekkora kell választani az alapélt?

Számítsd ki a négyzetes oszlop felszínét és térfogatát!

Megoldás:

A 140 cm a keresett négyzetes oszlop 8 alapélének és 4 oldalélének az összege.

$$8a + 4(a + 5) = 140 \text{ egyenletből } a = 10.$$

Az alapél 10 cm, az oldalél 15 cm. A négyzetes oszlop felszíne 800 cm^2 , térfogata 1500 cm^3 .

A helyes és teljes megoldásért 7 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 97 %.

3. Péter és Pál szeptemberben ugyanannyi forintot tett félre. Péter októberben 20%-kal többet, mint szeptemberben, és novemberben 20%-kal kevesebbet, mint októberben. Pál októberben 40%-kal kevesebbet, mint szeptemberben, és novemberben 40%-kal többet, mint októberben. A három hónap alatt ketten együtt 840 forintot gyűjtöttek. Mennyit gyűjtöttek az egyes hónapokban külön-külön?

Megoldás:

A félretett összeg százalékkal kifejezve:

	Szeptemberben	Októberben	Novemberben	Összesen
Péter	100 %	120 %	$120 \cdot 0,8 \% = 96 \%$	316 %
Pál	100 %	60 %	$60 \cdot 1,4 \% = 84 \%$	244 %

A 840 forint a szeptemberben külön-külön betett összeg 560 %-a. Ebből a 100 % 150 Ft.

A tanulók egy része egyenlettel oldotta meg a feladatot.

Péter szeptemberben 150 Ft-ot, októberben 180 Ft-ot, novemberben 144 Ft-ot, összesen 474 Ft-ot gyűjtött.

Pál szeptemberben 150 Ft-ot, októberben 90 Ft-ot, novemberben 126 Ft-ot, összesen 366 Ft-ot gyűjtött.

A helyes megoldásért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 86 %.

4. Vegyél fel egy konvex szöget és a szögtartományon kívül egy pontot! A kitűzött ponton át szerkessz olyan szelőt (egyenest), amelyiknek a közelebbi szárig terjedő darabja egyenlő a szárak közé eső darabjával!

Megoldás:

Vázlat:

Azt kell biztosítani, hogy $PD = DB$ igaz legyen. A PB egy olyan paralelogramma egyik átlójának tekinthető, amelyiknek egyik oldala rajta van a szögnek a P ponttól távolabbi szárán, az átló felezőpontja pedig a közelebbi száron.

Ha a P ponton át párhuzamost húzunk a tőle távolabb eső szárral, akkor a meghúzott párhuzamosnak és a szög szárának a metszéspontja (a vázlaton a C pont) meghatározza a paralelogramma egyik oldalát. Ezt az A pontból ráérve a távolabbi szárra, megkapjuk a B pontot, a paralelogramma negyedik csúcsát. A PB szakasz az egyik, az AC szakasz a másik átló, metszéspontjuk a D pont, ez felezi mindkét átlót. Tehát a P pontra és a leírt módon kapott B ponton áthaladó egyenesre igaz az, hogy a P ponthoz közelebbi szárig terjedő darabja egyenlő a szárak közé eső darabjával.

A helyes megoldásért és az elfogadható indoklásért 12 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 83 %.

5. A balatoni úttörőtáborban két csónak van. Az egyik háromszemélyes, a másik kétszemélyes. Hányféleképpen foglalhat helyet a két csónakban 5 pajtás? (A pajtások neve legyen Anna, Béla, Cili, Dénes, Erzsi.)

Megoldás:

Az egy csónakon belüli ülésrendet most nem kell figyelembe venni. A pajtások nevének kezdőbetűjével leírva a következő megoldások lehetségesek:

	A 3 személyes	A 2 személyes
	csónakban ülhet	
1.	A B C	D E
2.	A B D	C E
3.	A B E	C D
4.	A C D	B E
5.	A C E	B D
6.	A D E	B C
7.	B C D	A E
8.	B C E	A D
9.	B D E	A C
10.	C D E	A B

Az 5 pajtás a háromszemélyes és a kétszemélyes csónakban 10 féleképpen foglalhat helyet.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 82 %.

A második napi feladatok

1. Az a, b, c, d, e egymástól különböző egész számokat páronként összeadtam és összegként a következő tíz számot kaptam :

$$0, 2, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 12, 14.$$

Melyik ez az öt szám?

Megoldás:

Legyen az öt egész szám nagyság szerinti sorrendje a következő:

$$a < b < c < d < e.$$

A nagyságrend figyelembe vételével igazak a következő egyenlőségek :

$$a + b = 0; \quad a + c = 2; \quad c + e = 12; \quad d + e = 14.$$

A feladatban megadott 10 összegben mind az 5 egész szám négyszer fordul elő tagként. Tehát felírható a következő egyenlőség:

$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e = 0 + 2 + 4 + 6 + 6 + 8 + 10 + 10 + 12 + 14,$$

$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e = 72,$$

$$a + b + c + d + e = 18,$$

$$0 + c + 14 = 18,$$

$$c = 4,$$

$$a = 2 - 4 = -2; \quad b = 2; \quad e = 12 - 4 = 8; \quad d = 14 - 8 = 6.$$

A keresett öt egész szám nagyság szerinti sorrendben a következő:

$$-2; 2; 4; 6; 8.$$

A helyes megoldásért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 83 %.

2. Egy háromjegyű számra gondoltam. Ha ebből a számból elveszek 5-öt, akkor 5-tel osztható számot kapok; ha 6-ot veszek el, akkor a maradék osztható 6-tal; ha pedig 7-et, akkor 7-tel osztható számot kapok. Melyik számra gondoltam?

Megoldás:

Ha egy számból elveszek 5-öt, és a maradék osztható 5-tel, akkor maga a szám is osztható 5-tel. Ezért a keresett szám 5-tel is, 6-tal is és 7-tel is osztható.

5-nek, 6-nak és 7-nek a legkisebb közös többszöröse: 210 (már ez is háromjegyű). A 210 minden többszöröse 5-nek, 6-nak és 7-nek is többszöröse. 210-nek a kétszerese, háromszorosa és a négyszerese szintén háromjegyű szám.

Tehát a gondolt szám lehet: 210, 420, 630, 840.

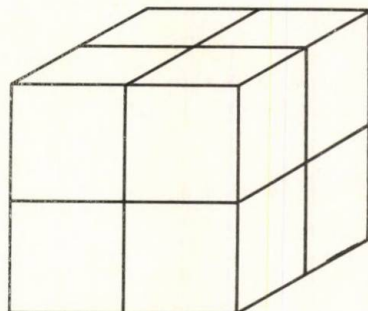
A helyes megoldásért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 88 %.

3. A színesrúd-készlet fehér kockáiból valahánynak az oldallapjait befestettük pirosra, kékre vagy sárgára. Az így befestett „színes” kiskockákból össze lehet állítani olyan nagyobb kockát, amelyik kívülről piros, vagy olyat, amelyik kívülről kék, vagy olyat, amelyik kívülről sárga. Legalább hány fehér kockának kellett az oldalait befesteni — és hogyan —, ha bármelyik színű nagyobb kocka ugyanakkora?

Megoldás:

Mivel a feladatban a lehető legkevesebb fehér kockák számát kell megkeresni, ezért azokat a nagyobb kockákat vizsgáljuk, amelyeknek az éle 2 cm. Ezek 8 kiskockából állíthatók össze. Mind a 8 kockának három közös csúcsban találkozó lapja azonos színű kell hogy legyen. Legalább 12 fehér kockának kell az oldallapjait befesteni, hogy akár piros, akár kék, akár sárga nagyobb kockát építhessünk belőlük.



Például így:

8 kockának 3-3 lapját pirosra, ezek közül 4-nek a másik 3 lapját kékre, 4-nek a másik három lapját sárgára;

4 kocka mindegyikének 3 lapját kékre, 3 lapját sárgára festjük.

Így biztos, hogy van 8 olyan kocka, amelynek 3 közös csúcsú lapja piros, van 8 olyan kocka, amelynek 3 lapja kék, és van 8 olyan kocka, amelynek 3 lapja sárga.

A helyes megoldásért 8 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 27%. Csak néhányan találták meg a legkevesebb kockák számát.

4. Egy 12 kérdéses „Kérdezz-felelek” játékban a felelő minden jó válaszért 5 pontot kap, és minden rosszért 3 pontot levonnak. Hányszor válaszolt Laci helyesen, ha a 12 kérdésre adott válaszaival 36 pontot szerzett?

Megoldás:

Ha a jó válaszok száma x , akkor a hibás válaszok száma $12 - x$. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$5x - 3(12 - x) = 36. \text{ Ebből } x = 9.$$

A jó válaszok száma 9, a rossz válaszoké 3. Laci a jó válaszokért 45 pontot kapott, de ebből a hibás válaszok miatt 9-et levontak, ezért kapott 36-ot.

A tanulók egy része nem egyenlettel, hanem próbálgatással oldotta meg a feladatot. A teljes megoldásért nekik is megadtuk a maximális pontszámot.

A helyes megoldásért 8 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 91 %.

5. Szerkessz háromszöget, amelyiknek az egyik oldala (a) 5 cm, a másik oldala (b) 4 cm és a harmadik oldalhoz tartozó magassága (m_c) 3 cm!

Megoldás:

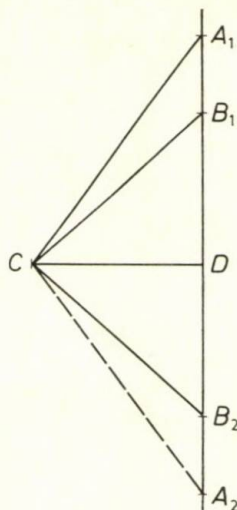
A feladatnak két megoldása van.

A szerkesztés lépései a következők lehetnek: Az m_c -ből indulunk ki. A felvett 3 cm-es — az ábrán a CD — szakasz D végpontjába merőlegest szerkesztünk. Ezen a merőlegesen megjelöljük a C -től 5 cm távolságra (A_1 , A_2) és 4 cm távolságra levő (B_1 , B_2) pontokat. A keresett háromszög egyik csúcsa a C pont, másik csúcsa

lehet az A_1 , a harmadik csúcsa vagy a B_1 , vagy a B_2 . Az első esetben az A_1B_1C háromszöget, a második esetben az A_1B_2C háromszöget kapjuk. Ha kiindulásul nem az A_1 pontot, hanem az A_2 pontot választjuk háromszögcsúcsnak, és tovább a leírtak szerint járunk el, akkor is az A_1B_1C háromszöggel és az A_1B_2C háromszöggel egybevágókat kapunk. Tehát ezek nem tekinthetők újabb megoldásoknak.

A teljes és helyes megoldásért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 71 %.



8. osztály

Az első napi feladatok

1. Egy 100-nál nagyobb és 200-nál kisebb számról a következőket tudjuk:

- osztható 12-vel,
- 5-tel osztva hármát ad maradékul.

Hány ilyen szám van? Melyek ezek?

Megoldás:

A 12-vel osztható számokra az igaz, hogy 3-mal is és 4-gyel is oszthatók. A 100-nál nagyobb és 200-nál kisebb 12-vel osztható számok a következők:

108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192.

Ezek közül a 8-ra végződők 5-tel osztva hármát adnak maradékul. Valamennyi feltételt két szám elégíti ki, a 108 és a 168.

A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 93 %.

2. Két zsebemben együttvéve 60 Ft van. Ha az egyikben levő pénz harmadrészét és még 6 Ft-ot átteszek a másikba, akkor ugyanannyi lesz mindkét zsebemben. Mennyi volt eredetileg egy-egy zsebemben?

Megoldás:

	A bal zsebemben levő forint	A jobb zsebemben
volt	x	$60 - x$
lesz	$x - \frac{x}{3} - 6 = \frac{2x}{3} - 6$	$60 - x + \frac{x}{3} + 6 = 66 - \frac{2x}{3}$

Igaz, hogy

$$\frac{2x}{3} - 6 = 66 - \frac{2x}{3}, \text{ ebből } x = 54.$$

Mivel a változás után az is igaz, hogy mindkét zsebemben külön-külön 30 forint lesz. ezért egyszerűbb egyenlet is felírható.

$$\frac{2x}{3} - 6 = 30, \text{ vagy } 66 - \frac{2x}{3} = 30.$$

Eredetileg az egyik zsebemben 54 forint, a másikban 6 forint volt. Az egyikből 24 forintot tettem át a másikba, így mindkét zsebemben 30 forint lett.

A helyes megoldásért 7 pontotadtunk.

A tanulók teljesítménye 92 %.

3. Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelyiknek egyik befogója 3 cm, a másik 4 cm! A kapott háromszög mindegyik oldalára (kívülre) szerkessz négyzetet! Kösd össze a különböző négyzetek szomszédos csúcsait egyenesszakaszokkal! Számítsd ki az így kapott hatszög területét!

Megoldás:

A szerkesztés eredményeként kapott hatszög területét három négyzet és négy háromszög területének összege adja.

$$t_I = 6 \text{ cm}^2, \quad t_{II} = 9 \text{ cm}^2, \quad t_{III} = 16 \text{ cm}^2,$$

$$t_{IV} = 25 \text{ cm}^2$$

(Pitagorasz tételét alkalmazva).

A továbbiakban azt kell belátni, hogy a négy háromszög azonos területű. A $t_I = t_{VI}$, mert az $ABC \triangle \cong GHC \triangle$, mindkettő derékszögű, és a befogók páronként egyenlők, tehát $t_{VI} = 6 \text{ cm}^2$.

Ha az ABC háromszöget a B pont körül 90° -kal elforgatjuk, akkor az EBC' háromszöget kapjuk. Az EFB háromszög FB oldalához tartozó magassága megegyezik az EBC' háromszög EC' befogójával, tehát 4 cm-es. Ezért $t_V = \frac{3 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

Ha az ABC háromszöget az A pont körül -90° -kal elforgatjuk, akkor az ADC^* háromszöget kapjuk. Az AID háromszög AI oldalához tartozó magassága megegyezik az ADC^* háromszög DC^* befogójával, tehát 3 cm-es. Ezért $t_{VII} = \frac{4 \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$. A hatszög területe $(9 + 16 + 25 + 6 \cdot 4) \text{ cm}^2 = 74 \text{ cm}^2$.

A helyes megoldásért 10 pontotadtunk.

A tanulók teljesítménye 79 %.

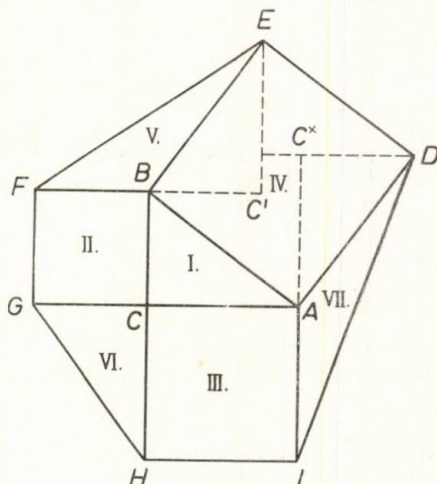
4. Vegyél fel egy konvex szöget és a szögtartományon kívül egy pontot! A kitűzött ponton át szerkessz olyan szelőt (egyenes), amelyiknek a közelebbi szárig terjedő darabja kétszerese a szárák közé eső darabjának!

Megoldás:

A szerkesztés lépései lehetnek:

A P ponton át párhuzamost húzunk a felvett szög P -től távolabbi szárával, ez a B pontban metszi a közelebbi szárát. Keressük meg a PB szakasz felezőpontját, a C -t! A PC szakaszt az A pontból a távolabbi szárra mérve megkapjuk a D pontot.

A P és a D ponton át húzott egyenesre igaz, hogy a P ponthoz közelebbi szárig



terjedő része kétszerese a száraz közé eső darabjának.

Igazolás:

$PBE \triangle \sim DAE \triangle$, mert

$PEB \sphericalangle = DEA \sphericalangle$ } fordított állású szögek
 $EAD \sphericalangle = EBP \sphericalangle$ } (váltószögek).

A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő. Ezért $\frac{BP}{AD} = \frac{PE}{ED} = 2$.

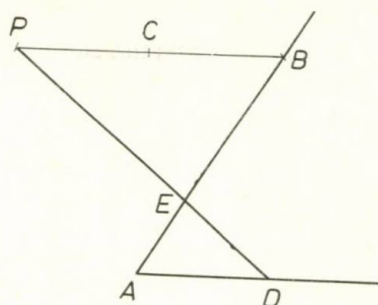
A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 92%.

5. Megegyezik a 7. osztály első napi 5. feladatával.

A tanulók teljesítménye 93%.

Vázlat:



A második napi feladatok

1. Megegyezik a 7. osztály második napi első feladatával.

A tanulók teljesítménye 75%.

2. Egy 4000-nél kisebb négyjegyű számról a következőket tudjuk:

— osztható 9-cel,

— ha az utolsó számjegyét elhagyjuk, akkor a kapott háromjegyű szám osztható 8-cal,

— ha az utolsó két számjegyét hagyjuk el, akkor a megmaradt kétjegyű szám osztható 7-tel.

Melyik ez a négyjegyű szám?

Megoldás:

A harmadik feltétel teljesítéséből indulunk ki. Megnézzük, hogy mi lehet az első két számjegy, hogy a kapott kétjegyű szám osztható legyen 7-tel. Majd a 3. számjegyet állapítjuk meg úgy, hogy teljesüljön a 8-cal való oszthatóság. Az utolsó számjeggyel biztosítjuk a 9-cel való oszthatóságot.

A feladat megoldása fadiagrammal:

1.jegy	2.jegy	3.jegy	4.jegy	a szám
1	4	4	0	1440
			9	1449
2	1	6	0	2160
			9	2169
2	8	0	8	2808
		8	0	2880
			9	2889
3	5	2	8	3528

A feladat megoldásáért 10 pontot adtunk.

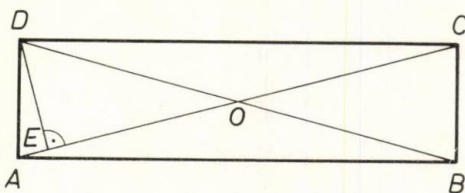
A tanulók teljesítménye 69 %.

3. Egy téglalap átlói 30° -os szöget zárnak be. A téglalap köré írt kör sugara 4 cm. Hány négyzetcentiméter a téglalap területe?

Megoldás:

Vázlat:

Ha a téglalap köré írt kör sugara 4 cm, akkor a téglalap átlója 8 cm. A vázlatrajzon meghúztuk az AOD háromszög AO oldalához tartozó magasságát, a DE szakaszt. A DEO derékszögű háromszögre az igaz, hogy ha az EO befogóra tükrözzük, akkor a tükrképével együtt szabályos háromszöget alkot. Ebből követ-



kezik, hogy $DE = \frac{DO}{2} = 2$ (cm). A DE az ACD háromszögnek is magassága.

Tehát az ACD háromszög területe $\frac{8 \cdot 2}{2} \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$. Az $ABCD$ téglalap területe ennek a kétszerese, tehát 16 cm^2 .

A feladat helyes megoldásáért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 65 %.

4. Az egyik edényben 12 liter 60%-os töménységű alkohol van, a másik edényben 8 liter 40%-os töménységű. Mindkét edényből úgy vettünk ki ugyanannyi liter folyadékot, hogy amikor átöntöttük a másik edénybe, mindkettőben azonos töménységű alkoholt kaptunk. Mennyi folyadékot vettünk ki mindegyik edényből, illetve öntöttünk át a másikba?

Megoldás:

Ha az edényekből külön-külön x liter folyadékot vettünk ki, illetve öntöttünk át a másikba, akkor az alkohol töménysége az első edényben

$$\frac{(12-x) \cdot 0,6 + 0,4x}{12}, \text{ a másikban } \frac{(8-x) \cdot 0,4 + 0,6x}{8}.$$

Ezek egyenlőségéből kiszámítható, hogy $x=4,8$. Mindkét edényből 4,8 liter alkoholt vettünk ki, és öntöttünk át a másik edénybe.

A feladat megoldásáért 10 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 41 %.

5. Egy 6 cm oldalú négyzetet megforgatunk először az egyik oldalfelező merőlegese körül, másodszer az egyik átlóegyenese körül. Milyen test keletkezik az első, milyen a második forgatáskor? Melyik esetben kisebb a keletkezett forgástest térfogata? Hány százaléka a kisebb térfogat a nagyobb térfogatnak?

Megoldás:

Ha a négyzetet az egyik oldalfelező merőlegese körül forgatjuk meg, akkor hengert, ha az egyik átlóegyenese körül forgatjuk meg, akkor közös alapú kettős kúpot kapunk.

A henger sugara 3 cm, magassága 6 cm, térfogata $3^2 \cdot \pi \cdot 6 = 54\pi \approx 169 \text{ (cm}^3\text{)}$.

A kúpok alapkörének sugara $\frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, magasságuk szintén $3\sqrt{2}$. Egy kúp

térfogata $\frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 18 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}$. A két kúp térfogata $36 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \approx 159 \text{ (cm}^3\text{)}$.

A kettős kúp térfogata a kisebb, a henger térfogatának megközelítőleg 94%-a.
A feladat helyes megoldásáért 10 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 64%.

A verseny helyezettjei

7. osztály

- | | |
|--------------------|--|
| 1. Zsoldos Gábor, | Szolnok, Gorkij u. Általános Iskola; |
| 2. Beke Tibor, | Nagyatád, Április 4. u. Általános Iskola; |
| 3. Kincses Zoltán, | Halászi, Kossuth u. Általános Iskola; |
| 4. Drasny Gábor, | Budapest, XII. Városmajor u. Általános Iskola; |
| 5—8. Kiss Tamás, | Budapest, XXII. Bartók B. u. Általános Iskola; |
| Tóth Gábor, | Szombathely, Hámán Kató u. Általános Iskola; |
| Vertse Judit, | Debrecen, Dózsa Gy. u. Általános Iskola; |
| Wagner Zsolt, | Dunaújváros, Bercsényi u. Általános Iskola. |

8. osztály

- | | |
|-----------------------|--|
| 1. Csizmazia Tamás, | Budapest, XIII. Lehel u. Általános Iskola; |
| 2—3. Lipták László, | Békéscsaba, Áchim A. Általános Iskola; |
| Vadász Dénes, | Miskolc, 21. sz. Általános Iskola; |
| 4. Benczur András, | Budapest, XII. Városmajor u. Általános Iskola; |
| 5. Tóth Zoltán, | Miskolc, 30. sz. Általános Iskola; |
| 6. Bende Mariann, | Bóly, Általános Iskola; |
| 7. Szalay György, | Budapest, Fazekas M. Általános Iskola és Gim.; |
| 8—10. Cynolter Gábor, | Budapest, Fazekas M. Általános Iskola és Gim.; |
| Gyuris Viktor, | Budapest, Lórántffy Zs. Általános Iskola; |
| Kovács Lajos, | Nyíregyháza, 2. sz. Gyakorló Általános Iskola. |

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ

főelőadó

Országos Pedagógiai Intézet

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

(Kísérleti anyag, III. osztály 2. rész)

A Matematika Tanítása 1983. évi 4. számában közzétük a III. osztályos részletezett követelményrendszert.

Ezt is, akárcsak az elsős és a másodikos követelményrendszert, két éven keresztül mérték 10, illetve 7 osztályban.

A mérésre szolgáló feladatlapokat változtatás nélkül közöljük az elért eredmények statisztikai adataival együtt. Még azokat a feladatokat sem változtattuk meg, amelyek

túl nehéznek vagy túl könnyűnek bizonyultak. Ugyanis úgy érezzük, hogy a statisztikai adatokkal együtt ezek még így is több információt nyújtanak, mint az esetleg helyükbe tett ki nem próbált, megfelelőbbnek vélt feladatok.

A méréseket az egyes témakörök összefoglalása után végeztük. 100%-nak vettük azt a pontszámot, amely úgy adódott volna, ha 10, illetve 7 (összesen 17) osztály minden egyes tanulója az egyes feladatokra maximális pontszámot kapott volna.

III. osztály, 1 téma

A csoport

1. Folytassuk a következő sorozatokat!

Milyen szabályosságot tapasztalunk?

a) $1; 4; 16; \dots$, $y = \dots$;

b) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots$, $y = \dots$

2. Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^x$ függvényt! (x egész szám).

3. Válasszuk ki a következő hatványok közül az egyenlőket!

$$3^4; 2^5; 3^{-4}; 6^2; \frac{1}{6^2}; \frac{1}{3^4}; \left(\frac{1}{2}\right)^5; \left(\frac{1}{3}\right)^4; \frac{1}{2^5}.$$

4. A betűk mely értéke mellett áll fenn az egyenlőség?

$$3^a = 27, \quad 4^b = 16, \quad 2^c = 64,$$

$$a = \quad b = \quad c =$$

$$5^d = \frac{1}{25}, \quad 3^k = \frac{1}{27}, \quad 6^t = \frac{1}{216},$$

$$d = \quad k = \quad t =$$

5. Írjuk fel a következő hatványok értékét!

$$10^4 = \dots; \quad 10^{-1} = \dots;$$

$$10^0 = \dots; \quad 10^{-3} = \dots;$$

$$10^2 = \dots; \quad 10^{-5} = \dots$$

6. Írjuk fel 10 hatványaiként a következő számokat!

$$1000 = \dots; \quad 100 = \dots; \quad 0,01 = \dots;$$

$$10\,000 = \dots; \quad 1 = \dots; \quad 0,001 = \dots;$$

$$1\,000\,000 = \dots; \quad 0,1 = \dots; \quad 0,0100 = \dots$$

7. Írjuk fel normál alakban a következő számokat!

$$31\,800 = \dots; \quad 2,8 = \dots; \quad 14,300 = \dots;$$

$$282\,100 = \dots; \quad 0,008 = \dots; \quad 0,0030 = \dots;$$

$$231\,132 = \dots; \quad 1,3008 = \dots; \quad 1,1020 = \dots$$

B csoport

1. Folytassuk a következő sorozatokat! Milyen szabályosságot tapasztalunk?

a) $1; 3; 9; \dots$, $y = \dots$;

b) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$, $y = \dots$

2. Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^x$ függvényt (x egész szám)!
3. Válasszuk ki a következő hatványok közül az egyenlőket!

$$4^5; 8^2; 3^3; 3^{-3}; \frac{1}{8^2}; \frac{1}{3^3}; \left(\frac{1}{4}\right)^5; \frac{1}{4^5}; \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

4. A betűk mely értéke mellett áll fenn az egyenlőség?

$$3^a = 9, \quad 4^b = 64, \quad 2^c = 32,$$

$$a = \quad b = \quad c =$$

$$5^d = \frac{1}{125}, \quad 3^k = \frac{1}{81}, \quad 6^t = \frac{1}{36},$$

$$d = \quad k = \quad t =$$

5. Írjuk fel a következő hatványok értékét!

$$10^3 = \dots\dots\dots; \quad 10^{-2} = \dots\dots\dots;$$

$$10^5 = \dots\dots\dots; \quad 10^{-4} = \dots\dots\dots;$$

$$10^0 = \dots\dots\dots; \quad 10^{-6} = \dots\dots\dots$$

6. Írjuk fel 10 hatványaiként a következő számokat!

$$100 = \dots\dots\dots; \quad 10\,000 = \dots\dots\dots; \quad 0,1 = \dots\dots\dots;$$

$$0,0010 = \dots\dots\dots; \quad 1\,000\,000 = \dots\dots\dots; \quad 0,01 = \dots\dots\dots;$$

$$1 = \dots\dots\dots; \quad 0,0001 = \dots\dots\dots; \quad 0,0100 = \dots\dots\dots$$

7. Írjuk fel normál alakban a következő számokat!

$$28\,000 = \dots\dots\dots; \quad 3,14 = \dots\dots\dots; \quad 21,100 = \dots\dots\dots;$$

$$379\,100 = \dots\dots\dots; \quad 0,000\,7 = \dots\dots\dots; \quad 0,010 = \dots\dots\dots;$$

$$172\,315 = \dots\dots\dots; \quad 1,403\,7 = \dots\dots\dots; \quad 0,300\,30 = \dots\dots\dots$$

Mérési eredmények:

Feladatok	1	2	3	4	5	6	7	Összesen
A feladatokra elérhető pontszám	14	6	10	12	6	9	9	66
Teljesítmény százalékban	56,6	61,6	46,5	66,3	73,7	74,9	54,1	61

III. osztály, 2. téma

A csoport

1. Egyszerűsítsük a következő kifejezést!

$$\frac{3a^2 + 9ab}{12ab} =$$

2. Végezzük el a következő összeadást!

$$\frac{3x-2}{x+3} + \frac{1}{1-2x} =$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$1 - \frac{x+3}{3x-1} = \frac{2}{5}.$$

4. Ha $x \approx 3,84$ századokra kerekített érték, akkor:

$$\dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots$$

5. Számítsuk ki annak a téglatestnek a térfogatát, amelynek élei 5,8; 2,1 és 3,0 cm hosszúak! Hány tizedes pontosságú a köbcentiméterben kifejezett eredmény?
6. Mely z értékekre van értelme a következő törtkifejezéseknek?

$$a) \frac{3}{z+2}; \quad b) \frac{5z-1}{1+z^2}.$$

Ábrázoljuk ezeket az értékeket a számegyenesen!

7. Készítsünk értéktáblázatot és ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$a) y = \frac{12}{x-1}; \quad b) y = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

(próbáljuk egyszerűbb alakra hozni a függvényt!).

B csoport

1. Egyszerűsítsük a következő kifejezést!

$$\frac{2mn-4m^2}{6m^2} =$$

2. Végezzük el a következő kivonást!

$$\frac{2}{x-3} - \frac{1-4x}{x+1} =$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet! $1 - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3}{4}.$

4. Ha $x \approx 2,36$ századokra kerekített érték, akkor:

$$\dots\dots\dots \leq x \leq \dots\dots\dots$$

5. Számítsuk ki annak a téglalapnak a területét, amelynek oldalai 5,186 és 3,28 cm hosszúak! Hány tizedes pontosságú lesz a négyzetméterben kifejezett eredmény?
6. Mely k értékekre van értelme a következő törtkifejezéseknek?

$$a) \frac{1}{k-3}; \quad b) \frac{2-3k}{k^2-1}.$$

Ábrázoljuk ezeket az értékeket a számegyenesen!

7. Készítsünk értéktáblázatot és ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$a) y = \frac{24}{x+1}; \quad b) y = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

(Próbáljuk egyszerűbb alakra hozni a függvényt!).

Mérési eredmények:

Feladatok	1	2	3	4	5	6	7	Összesen
A feladatokra elérhető pontszám	2	5	6	2	3	3	10	31
Teljesítmény százalékban	38,0	25,0	20,1	45,9	29,5	41,6	31,8	30,5

III. osztály, 3. téma

A csoport

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$x - 8y + 2 = 0,$$

$$3x + y - 8 = 0.$$

2. Oldjuk meg grafikusán a következő egyenletrendszert!

$$2x + 3y = 11,$$

$$15 - 3x = 4y.$$

3. Istvánnak és Zoltánnak ugyanannyi pénze van. István kétszer annyi tanulmányi segélyt kap, mint Zoltán. Írjuk fel mennyi lesz nekik ezután:

István

Zoltán

.....

.....

István 480 forintért cipőt, Zoltán 220 forintért kesztyűt vásárolt. Mennyi pénzük lesz ezután?

István

Zoltán

.....

.....

Ezután megszámlálják pénzüket, és azt tapasztalják, hogy Zoltánnak ugyanannyi a pénze mint Istvánnak.

.....

Mennyi pénzük volt eredetileg, ha a tanulmányi segély kifizetése után (a vásárlás előtt) összesen kettejüknek 1600 Ft-juk volt?

4. Egy üzemrészben kétféle árut termelnek. A kétféle termékből 1-1 darab elkészítése különböző ideig tart. Új gépek beállítása után az egyik (A) termék előállítási ideje felére, a másiké (B) negyedére csökken. Ekkor a B termék előállítási ideje 5 perccel hosszabb, mint az A-é.

Mennyi ideig tartott egy-egy termék előállítása a gépek beállítása előtt, ha akkor 2 db A termék és 3 db B termék elkészítéséhez összesen 40 perc volt szükséges? (A két terméket nem egyszerre, hanem egymás után készítették.)

B csoport

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$2x + 7y - 4,3 = 0,$$

$$x - 4y + 1 = 0.$$

2. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszert!

$$3x + 2y = 8,$$

$$14 - 4y = 5x.$$

2. Az A raktárban kétszer annyi azonos fajtájú termék található mint a B raktárban. Ezután az A és a B raktárba azonos mennyiségű terméket szállítottak. Írjuk fel mennyi lesz az egyes raktárakban:

A B

.....

Ezután a B raktárba 300 terméket hoznak és az A raktárból 150-et elvisznek.
Írjuk fel mennyi lesz ezután!

A B

Ezután az A raktárban ugyanannyi termék van, mint a B raktárban. Írjuk fel ezt az összefüggést is!

Mennyi terméket hoztak az első alkalommal az egyes raktárakba, ha ezután az első szállítás után összesen 1600 ilyen termék volt a két raktárban együttvéve?

4. Két különböző meretű hordóban alkoholt tárolnak. Az 1. hordóból 10, a 2.-ból 5 litert vesznek ki. Így az elsőben kétszer annyi alkohol lesz, mint a másodikban. Ha mindkét hordóból az ott levő alkohol felét vették volna ki, akkor az elsőben 10 literrel több lenne, mint a másodikban.

Hány liter alkohol volt az egyes hordókban?

Mérési eredmények:

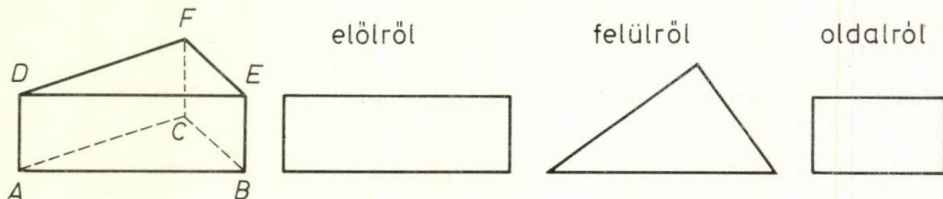
Feladatok	1	2	3	4	Összesen
A feladatokra elérhető pontszám	5	5	12	15	37
Teljesítmény százalékban	59,9	36,9	50,3	19,7	37,4

III. osztály, 4. téma

A csoport

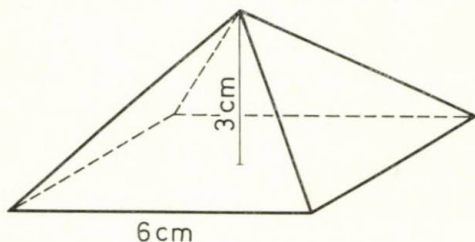
1.

Az ábrán látható test így néz ki:



Írjuk fel, hogy mely élei
párhuzamosak egymással:
metszik egymást:
merőlegesek egymásra:
kitérők egymáshoz viszonyítva:

2. Mekkora szöveget zárnak be az ábrán látható négyzet alapú egyenes gúla oldallapjai az alaplappal?
3. Egy egyenes körkúp átmérője 60 cm, a kúp magassága 40 cm. Mekkora a kúp felszíne?
4. Egy 1 m átmérőjű, 95 cm hosszú fekvő hengerben 85 cm magasan áll az olaj. Hány liter olaj fér még a hengerbe?



B csoport

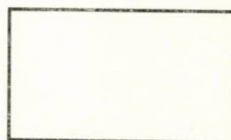
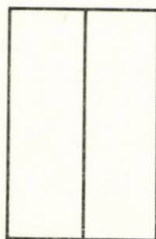
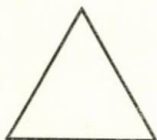
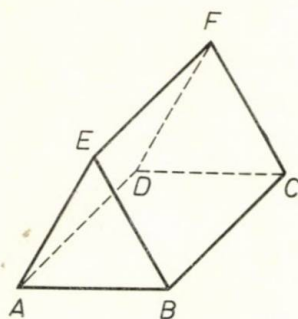
1.

Az ábrán látható test így néz ki:

előlről

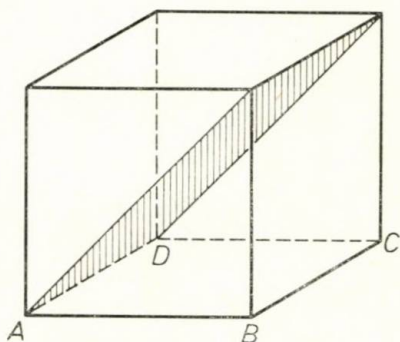
felülről

oldalról



Írjuk fel, hogy mely élei
párhuzamosak egymással:
metszik egymást:
merőlegesek egymásra:
kitérők egymáshoz viszonyítva:

2. Mekkora szöveget zár be az ábrán megjelölt sík a kocka $ABCD$ csúcspontú oldallapjával?
3. Egy négyzet alapú egyenes csonkagúla alapéle 12 cm, fedőlapjának éle 4 cm és magassága 6 cm. Mekkora a csonkagúla felszíne?
4. Egy 85 cm átmérőjű, 1 m hosszú, fekvő hengerben 25 cm magasan áll a víz. Hány liter víz fér még a hengerbe?



Mérési eredmények:

Feladatok	1	2	3	4	Összesen
A feladatokra elérhető pontszám	24	5	8	25	62
Teljesítmény százalékban	42,2	58,4	51,7	11,9	41,1

Helyesbítés

A Matematika Tanítása 1983. évi 1. számában közzétük a szakmunkásképző iskolák II. osztályos tantervi követelményének mérésére alkalmazott feladatlapokat és a mérési eredményeket.

A II. osztály 3. téma B csoportjának feladatlapjáról lemaradt a 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14. feladat.

Ezért szíves elnézésüket kérjük és a nevezett feladatokat itt közöljük.

8. Írjuk fel közös kitevő segítségével a következő hatványokat és számítsuk ki az értéküket!

$$a) 4^2 5^2 = \quad b) \frac{15^3}{5^3} =$$

9. Végezzük el tényezőnként a hatványozást!

$$a) (m \cdot n^4 \cdot p^3)^3 = \quad b) \left(\frac{a^6}{b^2}\right)^2 =$$

10. Melyik szám nagyobb: 15^4 vagy 45^2 ?

11. Végezzük el a következő szorzást, és vonjuk össze az egynemű tagokat!

$$(3k-1)(2k+1) =$$

12. Végezzük el a következő négyzetre emelést!

$$(3a+b)^2 =$$

13. Egyszerűsítsük a következő törtet!

$$\frac{23^2 - 3^2}{20} =$$

14. Emeljük ki a következő tagokból az azonos tényezőket!

$$5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 20x^2y =$$

KÖNYVISMERTETÉS

Kovács Csongorné—Novák Lászlóné—Sztrókayné Földvári Vera—Szeredi Éva

Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika. 7.

A könyv segíti a tanárok munkáját az órákra bontott tanmenetjavaslattal, a tankönyv és a matematika-munkalapok anyagának módszertani feldolgozásával, a tankönyv és a munkalapok feladatainak megoldásával. A közölt feladatkártyákat a differenciált foglalkoztatáskor hasznosíthatja a szaktanár.

A matematikai tehetségek gondozásának szakközépiskolai sajátosságai

A címbeli témamegjelölés két kérdést is felvet:

1. Vannak-e matematikai tehetségek a szakközépiskolában?
2. Szükség van-e sajátos — a gimnáziumtól eltérő — tehetséggondozási formákra, módszerekre?

A szakközépiskolai matematikai tehetségekről

A tehetségfogalommal kapcsolatban számos, egymást részben fedő definíció van forgalomban. Ezek közül az egyikre voksolni — e cikk keretében — felesleges. Sokkal fontosabb számunkra az, hogy a tehetségnek vannak általános és speciális tényezői. Néhány speciális tehetségterület, közöttük a matematika (a zene, a sakk és a tánc mellett) már igen *korán* felismerhető.

A matematikai tehetség korai felismerésének következményeként a szakközépiskolába matematikai tehetségek alig kerülnek. Az ilyen tanulót rendszerint már az általános iskolában felismerik és tanáraik a gimnáziumba írá-

nyítják. Ezekből tehát alig, csak ennek a pályairányítási tevékenységnek az elmulasztása révén profitál a szakközépiskola.

Mindezek ellenére szerencsére igen sok tehetséges gyerek kerül a szakközépiskolákba. Ezeknek a tehetsége azonban „másképp” nyilvánul meg: a gyakorlati intelligencia, a kez ügyesség, a szervező-képesség, a társakra való hatás stb. terén. Ezeknél a tanulóknál a meghatározó szakmai érdeklődés *mellett* megbújhat a matematikai képesség is, felfedezésük azonban jóval nehezebb, gondozásuk pedig speciális formákat, módszereket igényel.

A tehetséges tanulók kiválasztása

Az intellektuálisan tehetséges tanulók iskolaválasztását illetően a szakközépiskola a gimnáziummal szemben lépéshátrányból indul. Ebből azonban valamit behozhat egy jól szervezett felvételi vizsgával vagy felvételi beszélgetéssel, amely szakközépiskolai specialitás. Ennek a matematika-feladatsora ugyanis részben már a tehetségfelismerés szolgálatába állítható. Bár az alapvető cél az, hogy a tanuló matematikai alapismereteiről adjon információt, egyetlen (lehetőleg az utolsó) feladat igényesebb is lehet.

A produktív szellemi tevékenységek kettéválaszthatók. Az egyikhez olyan

feladatok tartoznak, amelyeknek egyetlen helyes megoldási menetük van. A gondolkodás munkáját egy bizonyos ponton egyetlen irányba terelik, konvergálják. Vannak viszont olyan feladatok, amelyek a konvergens gondolkodással szemben a gondolkodást egyidejűleg különböző irányba terelik, divergálják, mivel a feladatnak több — elvileg egyaránt értékes — megoldási módja lehetséges. Bár az igazán összetett problémamegoldás mindkét gondolkodásra épít, a kreativitás legszembevetőbb mutatói a megszokott keretektől fokozottan kilépő divergens gondolkodással függnek össze. [1]

A divergens gondolkodás fejlesztésére alkalmasak lehetnek az alábbi feladatok:

1. Egy raktárból 21 egyenlő nagyságú olajtartályt kell elszállítani három tehergépkocsival. A tartályok közül 7 tele van, 7 félig van, 7 pedig üres. Hogyan rak-

ják fel az olajtartályokat a három tehergépkocsira, hogy mindegyik terhelése ugyanakkora legyen, ha az olajat nem lehet az egyik tartályból a másikba átönteni?

2. Négy egymást követő egész szám szorzata 3024. Melyik a legkisebb?
3. Kólás- és sörösüvegeket váltottunk vissza a KÖZÉRT-ben. 20 Ft-ot kaptunk értük. Arra emlékeztünk, hogy 2,50 Ft a kólás-, 1 Ft a sörösüvegek betétje. Hány kólás- és hány sörösüveget vittünk vissza?
4. Nagypapa a következőket szokta mondani barátainak: „Mindegyik gyermekemnek annyi gyermeke van, mint ahány testvére; gyermekeim és unokáim száma pedig együttvéve annyi, mint életéveimnek száma.” Milyen idős a nagypapa?
5. Négy város vezetői elhatározták, hogy a városok közötti közlekedés céljára kör alakú utat építenek. A kör alakú utat úgy kívánják a térképen kijelölni, hogy mind a négy városból egyenlő hosszúságú bekötő út vezessen hozzá. (A négy város között nincs három olyan, amely egy egyenesre esik, és nincs olyan kör, amely mind a négy városon átmegy.) Hogyan szerkesztették meg a térképen az építendő út vonalát? Hány ilyen út szerkeszthető?
6. Szerkessz olyan háromszöget, amelynek van 5 cm-es és 3 cm-es oldala is, és kerülete 3-mal osztható természetes szám!
7. A 2 cm, 4 cm, 6 cm és 7 cm-es szakaszok felhasználásával hányféle háromszög szerkeszthető? (A háromszögnek egyenlő oldalai is lehetnek!) Sorold fel a lehetőségeket!
8. Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a belső szögei, amelynek egyik külső szöge 100° ?
9. Szerkessz négyzetet, ha tudod, hogy egyik szimmetriatengelyének a négyzetbe eső része 3 cm!
10. Vegyél fel egy szakaszt és rajta kívül egy pontot! Szerkessz rombuszt, amelynek az adott szakasz az egyik oldala, az adott pont pedig átlójának egy pontja!
11. Egy kört érintő négyszög három oldala (nem feltétlenül ebben a sorrendben) 3 cm, 4 cm és 5 cm. Mekkora a negyedik oldal?
12. Hány különböző téglatestet tudunk összerakni 1 cm³-es kockákból úgy, hogy mindegyik térfogata 32 cm³ legyen?

A felzárkóztató foglalkozások induló szintjét minden szakközépiskolában felméri a tanév első hónapjában. Ez a tevékenység is szolgálhatja a tehetségfelfedezést, különösen akkor, ha a feladatsort kiegészítjük azzal a teszt-sorozattal, amely szintén az ún. „kék könyvben”^{*} található a „Melyik hiányzik?” elnevezés alatt. Ezzel a logikusan gondolkodó, de kellően meg nem tanított gyerekek is kiválaszthatók.

E két tehetségpróbával a matematikai alapismeretek elsajátításának fokára már elég alapos megállapításokat tehetünk, de fontos jelzéseket kaphatunk a tanuló gondolkodásmódjáról is. Érdemes azon-

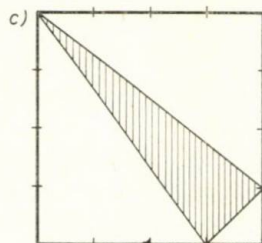
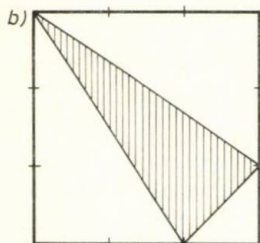
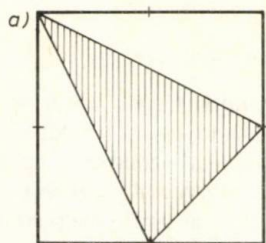
ban még egy harmadik próbát végezni, az igazi matematikai tehetség felismerésére. Miről ismerhető ez fel? Egy módszertani tankönyv [2] ismerteti V. A. Krutyeckij erre vonatkozó vizsgálatainak eredményét, mely szerint „kitűnő matematikai képességgel rendelkező ember elsősorban az, aki gyorsan, kevés számú példa alapján kiválasztja és általánosítja a jellemző összefüggéseket. Azonkívül az ilyen tanulóknál a gondolkodási folyamat az új feladat megoldásánál erősen lerövidül, s a már elsajátított gondolatmenetről gyorsan térnek át fordított irányú gondolatmenetre”.

^{*} Útmutató a gimnáziumi tanulók felzárkóztatásához. Szerkesztette Újszászi Jánosné. OPI (1979).

A fentiek alapján készült az alábbi feladatsor (A—B változatban), melynek feloldozására érdemes egy szeptemberi matematikaórát szánni.

A) változat:

1. A négyzet területének mekkora része a bevonalkázott háromszög?



Keress összefüggést az a), b) és c) feladat eredménye között!

2. Hogyan számította ki a gyermek Gauss az $1+2+3+\dots+40$ összeget? (Tanári bemutatással.)
 3. Igazold, hogy az egész számok összege 1-től 1000-ig osztható 143-mal!
 4. Van-e olyan n pozitív egész szám, amelyre az

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n$$

összeg 1984-gyel egyenlő?

B) változat:

1. A táblára ez volt felírva:

$$\frac{8^3+10^3}{2^3+10^3} = \frac{8+10}{2+10}, \quad \frac{19^3+65^3}{46^3+65^3} = \frac{19+65}{46+65}, \quad \frac{2^3+5^3}{3^3+5^3} = \frac{2+5}{3+5}.$$

a) Igazak-e az állítások?

b) Írj a fentiekhez hasonló példákat!

2. Időszámításunk előtt kb. 2000—1700 évvel Egyiptomban az egyik fáraó írnoka — természetesen nem a ma használt jelekkel — az alábbi egyenlőséget írta a papiruszára:

$$\frac{7}{29} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{145}.$$

(A törzstörtek fogalma, az egyenlőség igazolása, tanári vezetéssel.)

3. Időközben bebizonyították, hogy minden törtet fel lehet bontani törzstörtek összegére. Hogyan bontanád fel a következőket?

a) $\frac{19}{20}$; b) $\frac{7}{9}$.

4. Milyen eljárással osztható el 5 szelet csokoládé 12 tanuló között egyenlően úgy, hogy egyetlen szeletet se törjünk 12 részre?

A tehetség felfedezésére szolgáló feladatok ne tartalmazzanak túl sok ismeretet. Ne feledjük, hogy ezekre a tehetségpróbákra a vakáció után kerül sor, amikor néhány ismeret már elhalványult. Kevés ismeretanyaggal is készíthető a

gondolkodás fejlettségének vizsgálatára alkalmas feladat.

A tehességgondozással megbízott matematikatanárnak tehát már a tanév első hónapjában rendelkezésre áll egy olyan névsor, amelyben szereplő tanulók 1, 2

vagy 3 tehetségpróbán eredményesen helytálltak. Ez azért fontos, mert a szakközépiskolai tehetséggondozás: versenyfutás az idővel. Érdemes a tanulókról egy-egy kartotékot vezetni, s ezen 4 éven át feltüntetni a tehetség minden meg-

nyilvánulását (például a versenyeredményeket). Természetesen a névsor folyamatos bővülésével is számolni lehet, hiszen később, még 1-2 év múlva is fedezhet fel a tanár lassabban érő tehetséges tanulókat.

A szakközépiskolai matematikai tehetséggondozás célja és helyzete

A témát közelítsük meg néhány véleménynel:

„A középiskolai tanulók körében végzett tehetséggondozás célja korábban csak az egészen kiválóak felkutatása volt, jelenleg cél az olyan irányú szakemberképzés széles bázisának kialakítása is, amelyben a magas szintű matematikai felkészültség megszerzése lényeges szerepet játszik.” [3]

„Fel kell oldani a tehetségfejlesztés és a tömegoktatás dilemmáját. Nem szabad kizárólagossá tenni az elitképzést... A szakközépiskola kettős képzési célja megmarad: növekvő mértékben kell képessé tennie a tanulókat a felsőoktatásban való továbbtanulásra, s egyben szakképzettséget kell nyújtania.” [4]

„...az iskolai tehetséggondozás által felfedezett tanulókat mindenekelőtt a még nem specializáló gimnáziumok felé irányítjuk... Az iskolai tehetséggondozás nem pályázik szűk látókörű szakbarbárképzésre (sic!), hanem tehetséges, nyitott személyiségek kiválogatására. A szakmunkásképző és a szakközépiskolák csak annyiban érdekelnek bennünket, hogy feltehetően ezek növendékei között is vannak kiemelkedő „G” faktoros tehetségek, akik a legmagasabb szintű tanításra érdemesek.” [5]

Az első két dokumentum tehát nem tesz különbséget a gimnáziumi és a szakközépiskolai tehetséggondozás között. Annál inkább a harmadik, melyet így lehetne tömöríteni:

a gimnázium = a tehetséggondozás színtere,

a szakközépiskola = a szakbarbárképzés megvalósítója.

Ez a megalapozatlan kijelentés nem érdemelne figyelmet, ha a szakközép-

iskolai matematikatanár nem érezné amúgy is „hátrányos helyzetét” gimnáziumi kollégájával szemben a tehetségek gondozása terén. A legfőbb okot már említettük: a szakközépiskolába matematikai tehetségek csak elvétve kerülnek. De más gond is akad: a szakmai érdeklődés „árnyékában” meghúzódozó matematikai képesség felfedezése is, kibontakoztatása is igen nehéz. Ehhez módszertani segítséget kellene kapnia a tanárnak. De honnan? Szakfelügyelője rendszerint gimnáziumi tanár, aki bizonyára nagy tapasztalattal, de mégiscsak kívülről látja problémáit. A Matematika Tanítása sem bővelkedik szakközépiskolai cikkekben. Egyetlen példa: a matematikaszakkör a témája 10 írásnak. [6.] Közülük egy sem foglalkozik a szakközépiskolával. A középiskolai szakköri füzetek a gimnáziumi tehetséges tanulóknak készülnek. A KÖMAL-nak nincs szakközépiskolások részére kiírt pontversenye. Az OKTV is inkább OGTV. (Itt, de sok egyéb helyen, pl. rendeletknél tettenérhető, hogy a „középiskolai” szót használják, de „gimnáziumi”-ban gondolkodnak.)

De ne csak másokban keressük a hibát, hanem magunkban is. Nem él-e még mindig bennünk az a téves nézet, hogy csak az azonos szintű, átlagra szabott oktatás-nevelés demokratikus? Ennek következtében tettünk-e annyit a tehetséges tanulók érdekében, amennyi energiát a felzárkóztató foglalkozásokba, korrepetálásokba fektettünk?

Mindezek együttes következményeként a szakközépiskola egyre jobban lemarad a gimnáziumtól a tehetségek gondozásában. A közvélemény ugyanis mérhető eredményekből ítéli meg a tehetség-

gondozás sikerét, s azon keresztül az iskolát. Általában úgy vélekedik: objektív mérce az egyetemekre, főiskolákra felvettek száma vagy százaléka. Ezért a szülők és az általános iskolai tanárok a tehetséges tanulókat a gimnáziumba küldik, mondván, hogy a többiek „jók lesznek” a szakközépiskola számára. És kialakul egy „ördögi spirál”: ezek a „második vonalbeli” gyerekek még kevésbé ambicionálják majd a felsőfokú továbbtanulást, még kevesebb jut el közülük a főiskolákra, s ezáltal ismét devalválódik a szakközépiskola hírneve.

A szakközépiskolai tehetséggondozás

feladata tehát csak ez lehet: a szakközépiskolai felvételi vizsgától a felsőfokú felvételi vizsgáig terjedő, igen átgondolt és sajátos formákkal, módszerekkel minél több tanuló felsőfokú továbbtanulását biztosítani. Ez majd az iskola presztízisének lassú növekedését jelenti, melynek eredményeként egyre több tehetséges tanuló fogja választani az illető szakközépiskolát.

Ennek részeként *a szakközépiskolai matematikai tehetséggondozás célja: minél eredményesebb előkészítés az ipari, mező- és gazdasági jellegű főiskolák matematika felvételi vizsgáira.*

A szakközépiskolai tehetséggondozás szinterei és módszerei

A tanítási óra fontos szintere a tehetséggondozásnak. A tehetséges tanuló itt heterogén tanulói közösségben él. Csak kevés tehetséges tanuló van rajta kívül. Ha a tanár az osztály zöméhez szájba mondanivalóját, ez a tehetséges tanulóra nézve igen káros módszer: unatkozik, majd lassan visszafejlődik. A tanítási órát azonban nem lehet kizárólag a tehetséggondozásnak szentelni, hiszen a tanulók zömét a felvételi vizsgánál alacsonyabb követelményű érettségi vizsgára készítjük fel. A megoldás: a differenciált óravezetés. Erre azonban nem minden pedagógus képes. Számukra a részleges differenciálást lehetne javasolni, mely az új anyag közlésére *nem*, a gyakorlásra *alkalmanként*, a házi feladatokra *mindig* vonatkozik. Az utóbbi elengedhetetlen! Az egységes házi feladat ugyanis nem kíván igazi önkifejtést. Egy ember olyan felhasználása, amikor kevesebbet követelünk tőle és szabunk ki rá, mint amennyit elbír: tékozlás a tehetséggel.

A matematika-szakkör a mai szakközépiskolában sok szervezési hibával küzd, mely a tanulók gyors lemorzsolódásához vezethet. Ügyelni kell arra, hogy ne „ki szeretne járni?” alapon történjen a válogatás. A szelektálás tudata: motiváció. A tehetségpróbák alapján

a tanár az osztály előtt „hívja meg” a tanulót. Ez ilyen formában „rangot” jelent. A létszám menet közben is így, meghívásos alapon bővíthető.

Az időpont megválasztása rendkívül fontos. Az ötnapos munkahét következtében a tanulónak általában napi 7 órájuk van. A 8. és 9. órában tartott matematika-szakkör semmit sem ér. Csak akkor tartsunk tehát, ha az a 6. és 7., vagy a délelőtti órákban megvalósítható. (Pl. délutáni gyakorlat esetén.) Valószínűleg így is csak az I. évfolyamon sikerül megszervezni. A II., III. évfolyamon a magas heti óraszám és a szakma felé forduló érdeklődés miatt a kötött idejű szakkör már alig szervezhető. Ezért inkább ne erőltessük, hanem helyette otthoni versenyfeladat-megoldást szervezzünk.

Hiba az is, ha tisztázatlan a szakköri program: a matematikából kiemelt fejezetek előtanítása, kurióziumok, matematikatörténeti életrajzok tartósan nem kötik le a tanulók figyelmét. A felvételi előkészítést a IV. osztályos, órarendbe iktatott heti 2 óra eredményesebben oldja meg. Természetes feladata viszont a szakkörnek a versenyekre való előkészítés. A megfelelő tartalom megtalálásához figyelembe kell venni, hogy ezeknek a tanulónak a szakirányú érdeklődése

erős, a matematika iránti viszont nem mindig. Gyakorlati problémák iránt fogékonyak, ezért ilyenekkel kell a foglalkozásokat eleinte megtölteni. Csak később, s igen óvatosan lehet „tisztá” matematikai problémákkal előhozakodni.

Az alábbiakban bemutatok néhány feladatot, mely az I. évesek körében igen

kedvelt volt, hiszen témája: az autó. Ezeknek a feladatoknak a nehézsége egy kívülálló számára abban áll, hogy sok műszaki, gyakorlati fogalmat kell addig tisztázni, amíg a tiszta matematikai problémáig eljutunk. A technikai érdeklődésű, tehetséges tanulóknak mindez rendkívül egyszerű.

1. Egy gépkocsi 88 oktános benzint igényel. A 40 literes tank megtöltéséhez hány litert töltessünk a 86, és hány litert a 92 oktánosból?
2. Egy tehergépkocsi a 92 km-es út felét 50 km/h, a másik felét teherrel 30 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az egész útra vonatkozó átlagsebessége?
3. A fékút az autó sebességének függvénye:

$$v \mapsto 0,077 v^2$$

(a sebesség km/h-ban, a fékút méterben, vízszintes, száraz úton). Számítsuk ki a fékutat 20 km/h, 40 km/h, 60 km/h, 80 km/h és 100 km/h sebesség esetén!

4. A gépkocsi üzemeltetési költsége két részből áll. Egy bizonyos összeget akkor is ki kell fizetni, ha a gépkocsi a garázsban áll. (Casco-biztosítás, műszaki vizsgadíj, garázsbérlet stb.) Legyen ez kerek 8000 Ft. A költségek másik része viszont a megtett kilométerek számától (x) függ. (Javítási, szerviz- és üzemanyag költségek, kb. 2,50 Ft kilométerenként.)
 - a) Írd le a függvényt formulával és grafikonnal. (A tengelyekre: megtett út ezer km-ben, illetve üzemeltetési költség ezer Ft-ban.)
 - b) Hány kilométert autózhatnánk évente, ha havonta 2000 Ft-ot költünk a gépkocsira?
5. Egy autó gázolt és továbbrobogott. A tanúk közül az egyik azt vallotta, hogy az autó rendszáma 4 páros számjegy, a másik tanú arra emlékezett, hogy az első és az utolsó ugyanaz a számjegy, a harmadik tanú azt mondta, hogy az első két számjegy összege kétszerese volt a másik két számjegy összegének. Mi volt az autó rendszáma?
6. Az autó kilométer-számlálóján érdekes szám jelent meg: 15 951 (a számjegyek a középső, 9-es számjegyre nézve szimmetrikusak). Pontosan két óra múlva ismét szimmetrikus számot mutatott a kilométeróra. Mekkora sebességgel tehetette meg az autó a kétórás utat?

A tehetséges tanulók vállára nehezedik a szakmai szakkör, a sportkör, a vetélkedők, a KISZ-munka stb. idővel alig elviselhető terhe. Ha a matematika számára is meg akarjuk őket tartani, azt csak kompromisszumok árán tehetjük. Ilyen lehet pl. az I. éveseknél a „kombinált szakkör” (elektronika + matematika, számítástechnika + matematika), a II. és III. évben pedig a szakkör merev formáinak feloldása: házi feladatmegoldó-verseny + „matematikai ügye-

let”. Ez abban különbözik az emelt szintű korrepetálástól, hogy a kijelölt időpontban és helyen a tehetséggondozásért felelős szaktanárt találja a tanuló, akihez feladatmegoldási problémáival akár 5 percre is betérhet. (Itt nyújtható segítség a FEB-példákon elakadóknak is.)

Matematikai tanulmányi versenyt — országos, megyei vagy megyék közti jelleggel — többet is rendeznek. Ezek egy részében — leginkább az I. évfolyamon — a gimnazistákkal együtt versenyezte-

tik a szakközépiskolásokat, feltehetően abból a megfontolásból, hogy a tananyag és az óraszám a két iskolatípus I. évfolyamán lényegében azonos. Csak-hogy ennél fontosabb szempontok (az általános iskolai matematikaversenyeken rutint szerzett, tehetséges tanulók és a tehetséggondozásban gyakorlatot szerzett tanárok száma) a gimnáziumot hozzák előnybe. A feladatok szövegezése is gyakran a gimnáziumi tankönyvek stílusához, jelölésrendszeréhez igazodik. Az ilyen együtt szervezett — úgymond: középiskolai, de valójában gimnáziumi — versenyeken való szakközépiskolai részvétel inkább hátrányos, mint előnyös, hiszen a szakközépiskolában tehetségesnek mondott tanuló alulmarad, s ez elveszi kedvét a matematikával való foglalkozástól. Tömegesen előidézheti ezt az a káros igazgatói, szakfelügyelői utasítás, amely szerint bizonyos versenyekre évfolyamonként bizonyos számú tanulót *kell* kiállítani. Az ily módon „mélyvízbe dobott” tanulók szinte biztos sikertelenségének csak a matematikától való elfordulás lehet a következménye. A helyes módszer: alapos, irányított felkészülés, háziverseny alapján történő szigorú válogatás! Tehetséges tanulói érdekében a szaktanárnak szembe kell szállnia a vezetői tekintéllyel, a szakmai sovinizmussal. (Szerencsére, jó példa is akad: a Fejér megyei versenyeket évek óta évfolyamonként gimnáziumi és szakközépiskolai kategóriában rendezik.)

Mi lenne a szakközépiskolai matema-

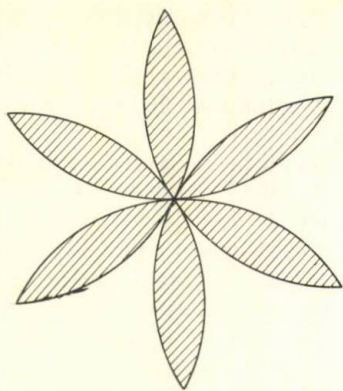
tikaversenyek (beleértve a KÖMAL pontversenyét is) célja, milyen a színvonala? Ahhoz érezzük közelállónak, amit Hódi Endre ír a Matematikai Feladatkörökről:

„...évfolyamonként szervezettek, meghatározott (az illető évfolyam tantervi anyagához illeszkedő) ...feladatok között nemigen fordulnak elő olyanok, amelyeknek megoldása egészen különleges ötletet vagy találmányságot igényel... fontos szerepet tölthetnek be azoknak az értelmes, jó képességű középiskolásoknak matematikai fejlődésében, akik előreláthatólag nem lesznek majd alkotó matematikusok, de a matematikát különféle természettudományokban, műszaki és közgazdasági problémák megoldásában... magas szinten fogják alkalmazni. Ennek pedig két szempontból is nagy a jelentősége: ilyenfajta szakemberekre lényegesen nagyobb számban van szüksége minden országnak, így hazánknak is, mint ahány matematikusra, másrészt az a tapasztalat, hogy amíg nálunk a matematikából legkiemelkedőbbekkel való törődés eredményessége nemzetközileg is kiállja a próbát (miként ezt tanulóinknak a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon tanúsított szereplése is mutatja), addig ennek a szélesebb rétegnek a középfokú matematikai képzettsége egyáltalán nem mondható kielégítőnek (miként ezt a különböző egyetemek, főiskolák és felsőfokú technikumok felvételi vizsgáin szerzett tapasztalatok tanúsítják).” [3]

Az Országos Szakmai Tanulmányi Versenyeken is jelentős szerepet kap a matematika. Az I. (iskolai) fordulóban például az összpontszám 40%-át lehet matematikából megszerezni, mint pl. az alábbi, 1982.évi feladatsorral:

1. Egy háromjegyű szám jegyei számtani sorozatot alkotnak a felírás sorrendjében. Ha a számot elosztjuk a jegyek összegével, akkor 26-ot kapunk. A számjegyeket fordított sorrendben leírva, az eredetinel 396-tal nagyobb számot kapunk. Határozza meg a számot!
2. Egy rombusz kerülete 100 cm. Az egyik átlója 34 cm-rel nagyobb a másiknál. Mekkora a rombusz területe?
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x számra fennáll a következő összefüggés:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 \geq 0.$$



4. Az ábrán látható hatszirmú virág köré írható kör sugara ugyanakkora, mint a szirmokat határoló körívek sugara. Ha ez a sugár 1 cm, akkor mekkora a bevonalkázott terület nagysága?
5. Legyen n 2-vel egyenlő vagy kettőnél nagyobb természetes szám! Bizonyítsuk be, hogy 3^n mindig felírható három egymás után következő természetes szám összegeként!
6. Mely x számokra teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\operatorname{tg} 4x = \sin 8x.$$

7. Osszuk fel egy adott szakaszt olyan két részre, hogy a részekre mint oldalakra rajzolt egyenlő oldalú háromszögek területének összege minimális legyen!

A tehetséggondozáshoz tehetséges tanárok kellenek

Nem vitatjuk, hogy ebben az iskola-típusban a tehetséggondozás kérdése sohasem állt előtérben. Inkább a gyenge képességű, vagy tanulni nem szerető tanulók állandó korrepetálása kötötte le a tanári energiát, ugyanis itt uralkodott el leginkább a mennyiségi szemlélet, mely úgy nyilvánult meg, hogy minél több tanulót kell a lehető legrövidebb idő alatt (azaz: bukásmentesen) a termelés számára kiképezni. Ehhez a cél-

kitűzéshez és nem a minőség, a tehetség gondozásához igazodtak a tanárok módszerei. Pedig a tehetséggondozáshoz tehetséges tanárok is kellenek. A szak-középiskola ilyenekben nem bővelkedik. A pedagóguspálya jelenlegi presztízst tekintve azonban minimális követelményként beérhetjük a tehetségek gondozásáért felelősséget érző, állandó önképzési igényű kartársakkal (szakmai, módszertani és pszichológiai területen).

A tehetséges tanulókkal való bánásmód 10 pontja

1. Időben ismerjük fel a tehetséget, mert az elveszett időt nehéz pótolni.
2. Differenciált óravezetéssel, külön kérdésekkel, feladatokkal biztosítjuk a tehetséges tanulók állandó érdeklődését.
3. Az újszerű ötletekkel, zavarbaejtő kérdésekkel jelentkező tanulókat ne intsük le, hanem szálljunk velük vitába.
4. Csak kellő felkészítéssel szervezzünk be tanulót tanulmányi versenyre.
5. Anélkül, hogy elkülönítenénk a tehetséges tanulókat a többiektől, biztosítjuk számukra az önálló munkát.
6. Túlzott önbizalmuk esetén állítsuk őket olyan nehéz feladat elé, hogy a siker-telenséget is megismerjék, s emiatt reális önismeretre, szerénységre kényszerüljenek.
7. Engedjük, hogy gyorsan áthaladhassanak egy anyagrészt elemi lépcsőfokain, hogy mielőbb eljussanak a magasabb szintű tevékenységhez, melyhez biztosítunk számukra eszközöket.
8. Inkább irányítsuk, mint vezessük őket.
9. Biztosítsuk számukra az állandó megerősítést.
10. Kövessünk el mindent annak érdekében, hogy a tehetséges tanulók vállalják a felsőfokú továbbtanulást.

Ha azt akarjuk, hogy a szakközépiskolai tehetséggondozás ne maradjon pusztá deklaráció, alakítsuk át a megmerevedett formákat és harcoljunk újabb lehetőségeért. Ezek lehetnek:

1. Legyen minden szakközépiskolában egy matematika szaktanár, aki személyében felelős a tehetséggondozásért. Mentessüljön az egyéb kötelezettségek (pl. a felzárkóztatás, a korrepetálás) alól. Tevékenysége terjedjen ki
 - a tehetséges tanulók kiválasztására, számuk állandó bővítésére, a rájuk vonatkozó feljegyzések vezetésére,
 - az I. évesek szakkörének, a II.—III. évesek feladatmegoldó háziversenyének megszervezésére és vezetésére, a megerősítés célját szolgáló „matematikai ügyelet” tartására,
 - a (kimondottan) szakközépiskolások részére kiírt matematikai versenyekkel és a szakmai tanulmányi verseny matematikai részével kapcsolatos összes teendőkre (a selejtező háziversenytől a felkészítésen át az eredményhirdetésig).
2. Vegyük figyelembe a magas heti óraszám, az ötnapos munkahét és a tanulók elsőrendű szakmai érdeklődésének következményeit, s így ne erőltessük olyan kötött formák létét, melyeket csak a délutáni órákban lehetne tartani (felsősök szakköre; egyetemi előkészítő stb.), hanem keressünk rugalmasabbakat (a hétvégi pihenőnapokra szervezett otthoni feladatmegoldó-versenyek, a nem egész órás lekötöttséggel járó matematikai ügyelet stb.).
3. Szorgalmazzuk, hogy az országos és a megyei jellegű tanulmányi versenyeken a szakközépiskolások külön kategóriában indulhassanak. Indítson részükre a KOMAL külön pontversenyt. Készüljenek matematikai segédanyagok a szakközépiskolások számára is.

A sajtóban most egymást érik a műszaki értelmiség helyzetét (jogosan) felpanaszoló írások, melyek hatása a szakközépiskolában úgy jelentkezik, hogy a tehetséges tanulók egy része — első sorban a fiúk — lemondanak a felsőfokon való továbbtanulásról, amivel a szakközépiskolai matematikai tehetség-

gondozás értelmét veszti. Amíg ezen a helyzeten az egész társadalom összefogásával változás nem következik be, addig a Madách egykori iskolaépületében jelenleg tanító matematikatanár sem tehet mást, mint azt, hogy (az ország többi részében dolgozó kollégájával együtt) küzd és bízva bízik...

IRODALOM

- [1] DR. BARTHA LAJOS szerk.: *Pszichológiai alapfogalmak kis enciklopédiája*. Tankönyvkiadó, Bp. 1978. (113. oldal).
- [2] GAZSÓ—MOSONYI—VÖRÖS: *A matematika tanítása*. Tankönyvkiadó, Bp. 1974. (150. oldal).
- [3] HÓDI ENDRE: *Kiváló tanulók fejlődésének elősegítése*. CSER ANDOR szerk.: *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése*. Tankönyvkiadó, Bp. 1977. (275. és 281. oldal).
- [4] *Javaslat a közoktatás fejlesztésére*. Köznevelés, 1983. szept. 16. (4. oldal).
- [5] HARSÁNYI ISTVÁN: *A tehetségfelismerés és a tehetséggondozás mai feladatai*. Somogy megyei PTI, Kaposvár, 1981.
- [6] A Matematika Tanítása
 - 1961/1. sz. MARÓT REZSŐ: *Szakköri élet a győri gimnáziumokban*.
 - 1962/5. sz. FEKETE ZOLTÁN: *Egy matematikai szakkör élete*.
 - 1963/3. sz. BARTHA ERNŐNÉ: *Matematikai szakkör az általános iskolában*.
 - 1963/4. sz. VERESS JENŐ: *A matematikai szakköri foglalkozásokról*.
 - 1968/5. sz. JÁSZ ALAJOSNÉ: *Gondolatok az általános iskolai matematikai szakköri irodalomról*.
 - 1971/2. sz. VERESS JENŐ: *Korszerűsítsük az iskolai matematikai szakköreinket*.

1972/5. sz. LÁNG HUGÓ: *A szakkörök munkájáról.*

1973/2. sz. DR. LEINDLER LÁSZLÓNÉ: *Néhány gondolat az általános iskolai matematika-szakkörökről.*

1981/2. sz. BÁNHEGYI LÁSZLÓ: *A legjobbak foglalkoztatása képességeiknek megfelelően és fejlesztésük matematikából az iskolában.*

1982/2. sz. BOGDÁN ZOLTÁN: *Néhány gondolat a gimnáziumi matematika-szakkör érdekében.*

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10.; 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1053. Melyik az a 12 egymásutáni legkisebb hatjegyű természetes szám, amelyikre igaz, hogy közülük a legnagyobb 12-vel, az ennél eggyel kisebb 11-gyel, az ennél eggyel kisebb 10-zel, és így tovább, végül az utolsó előtti 2-vel osztható?

Horváth Tibor, Dunakeszi

1054. Oldjuk meg az egész számpárok halmazán az

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x^2 + xy + y^2)$$

egyenletet!

Bencze Mihály, Brassó

1055. Az $A_1 A_2 \dots A_n$ húrsokszögben a_i jelölje az $A_i A_{i+1}$ oldalt ($A_{n+1} = A_1$), r a körülírt kör sugarát, k a sokszög kerületét, t pedig a területét.

Bizonyítsuk be, hogy

$$2rk < 4t + \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 2\sqrt{2}rk.$$

Pataki János, Szatmár

1056. Igazoljuk: ha egy körüljárás szerint jelölt $ABCDEF$ konvex hatszög olyan, hogy $AB \perp BC$, $CD \perp DE$, $EF \perp FA$ és $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$, akkor a hatszög minden támasztéglapja négyzet!

Kárteszi Ferenc, Budapest

1057. A 8×8 -as sakktábla valamennyi mezőjét befestjük négy szín valamelyikével úgy, hogy bármely csomópontra illeszkedő négy mező különböző színű legyen. Lesznek-e a sarokmezők között azonos színűek?

1058. Legyen $0 < a < b$. Bizonyítsuk be, hogy

$$e^{1-\frac{a}{b}} < \frac{b}{a} < e^{1+\frac{a}{b}},$$

ahol $\ln e = 1$.

Bereznai Gyula, Nyíregyháza

Feladatmegoldások (1029—1034.)

1029. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^4 - 4x + 3 = y^2$$

egyenletnek végtelen sok *racionális* (x, y) megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

Megoldás: Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2 \cdot [(x+1)^2 + 2] = y^2.$$

Elegendő belátnunk, hogy az

$$(1) \quad (x+1)^2 + 2 = k^2$$

egyenletnek végtelen sok (x, k) racionális megoldása van. Legyen $k = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor

(1)-ből

$$(x+1)^2 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}.$$

Vizsgáljuk most az

$$a^2 - 2b^2 = c^2$$

egyenletet az egész számok halmazán.

Mivel $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, feltehető, hogy a és c relatív prímek, hiszen ellenkező esetben legnagyobb közös osztójukkal egyszerűsítve fenti alakú egyenlethez jutunk. De

$$a^2 - 2b^2 = c^2$$

akkor és csak akkor, ha

$$a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) = 2b^2.$$

Mivel $(a, c) = 1$, ezért $(a+c, a-c) = 1$ vagy 2 , tehát lényegében

$$a+c = 2b_1^2,$$

$$a-c = b_2^2$$

kell legyen, ahol $b_1 \cdot b_2 = b$. E két egyenletből

$$2a = 2b_1^2 + b_2^2,$$

ezért $b_2 = 2b_3$, $b_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, és ezért

$$(*) \quad a = b_1^2 + 2b_3^2, \quad c = b_1^2 - 2b_3^2, \quad b = 2b_1b_3.$$

Ezekkel, és $b_1 = 1$ választással

$$\frac{a^2 - 2b^2}{b^2} = \left(\frac{b_1}{2b_3} - \frac{b_3}{b_1} \right)^2 = \left(b_3 - \frac{1}{2b_3} \right)^2.$$

Ha b_3 befutja a pozitív egész számok halmazát, akkor $b_3 - \frac{1}{2b_3}$ különböző értékeket vesz fel, hiszen

$$b_3 - \frac{1}{2b_3} = m - \frac{1}{2m}$$

akkor és csak akkor, ha

$$(b_3 - m) \left(1 + \frac{1}{2b_3m} \right) = 0,$$

ha tehát $b_3 = m$, hiszen a második tényező pozitív. Az a, b, c fentieknek megfelelő választása, mint az könnyen látható, eredeti egyenletünket kielégítő (x, y) racionális számpárt ad.

Ezzel beláttuk, hogy eredeti egyenletünknek végtelen sok (x, y) racionális megoldása van. Meghatározhatjuk azonban az összes racionális gyökét is! Az előbbiekből ugyanis

$$(x+1)^2 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} = \left(\frac{b_1^2 - 2b_3^2}{2b_1b_3} \right)^2,$$

innen

$$x = \frac{b_1^2 - 2b_3^2 - 2b_1b_3}{2b_1b_3} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{2b_3^2 - b_1^2 - 2b_1b_3}{2b_1b_3},$$

tehát (1) és (*) miatt, eredeti egyenletünk

$$y = \pm (x-1) \frac{a}{b},$$

azaz

$$(1; 0) \left(\frac{b_1^2 - 2b_3^2 - 2b_1b_3}{2b_1b_3}; \pm \frac{(b_1^2 - 2b_3^2 - 2b_1b_3)(b_1^2 + 2b_3^2)}{4b_1^2b_3^2} \right) \\ \left(\frac{2b_3^2 - b_1^2 - 2b_1b_3}{2b_1b_3}; \pm \frac{(2b_3^2 - b_1^2 - 2b_1b_3)(b_1^2 + 2b_3^2)}{4b_1^2b_3^2} \right)$$

megadják az összes $(x; y)$ racionális megoldást, ha b_1, b_3 befutja a $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ halmazt.

Az $(1; 0)$ pár az egyetlen egész $(x; y)$ megoldás, hiszen

$$x = \frac{\pm (b_1^2 - 2b_3^2) - 2b_1b_3}{2b_1b_3} = \pm \left(\frac{b_1}{2b_3} - \frac{b_3}{b_1} \right) - 2$$

akkor és csak akkor egész, ha

$$\frac{b_1}{2b_3} - \frac{b_3}{b_1} = k \in \mathbb{Z},$$

ha tehát

$$b_1^2 = 2kb_1b_3 + 2b_3^2.$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen a két oldalon álló nullától különböző egészek 4-gyel való osztási maradéka különböző, mert $(b_1, b_3) = 1$ feltehető.

Cseh László, Kolozsvár

A megoldók száma 22.

1030. Legyen P a szabályos n -szög egy, a csúcspontoktól különböző tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos n -szögnek vannak olyan A_i, A_j csúcspontjai, amelyekre

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi \leq \angle A_i P A_j < \pi.$$

Strohmajer János, Budapest

Megoldás: Legyen A_i, A_j a szabályos n -szög két tetszőleges csúcsa. Keressük azon pontok halmazát (mértani helyét), amelyekből az $A_i A_j$ oldal vagy átló

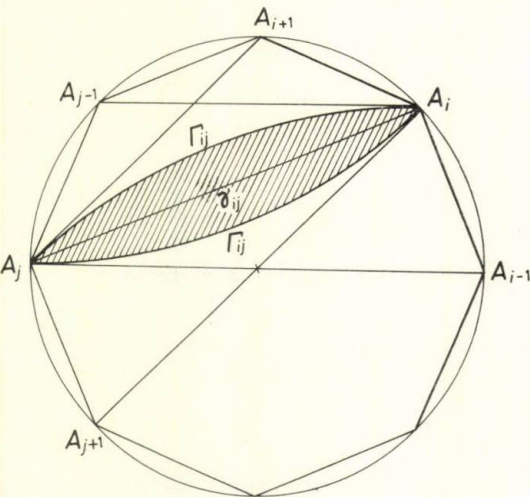
$$\alpha \in \left[\pi - \frac{\pi}{n}, \pi \right)$$

szög alatt látszik.

Jelölje Γ_{ij} azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből az $A_i A_j$ szakasz $\pi - \frac{\pi}{n}$ szögben látszik. Ismert, hogy e halmaz két, az $A_i A_j$ végpontjait összekötő, az $A_i A_j$ -re szimmetrikus körív belsejének pontjaiból áll.

A Γ_{ij} -t alkotó körívet az $A_i A_{j-1}, A_i A_{j+1}$ húrok az A_i -ben, az $A_j A_{i-1}, A_j A_{i+1}$ húrok pedig A_j -ben érintik.

A Γ_{ij} által határolt, $A_i A_j$ -t tartalmazó γ_{ij} „lencse” belső P pontjaiból az $A_i A_j$ húr $\pi - \frac{\pi}{n}$ -nél nagyobb szögben látszik, azaz



$$\pi - \frac{\pi}{n} \equiv A_i P A_j \triangleleft \equiv \pi,$$

és az egyenlőség csakis akkor teljesül, ha $P \in \Gamma_{ij}$ vagy P az $A_i A_j$ húr belső pontja. Legyen az n -szög köré írható kör középpontja O és A_i egy tetszőleges csúcsa a sokszögnek.

Bebizonyítjuk, hogy az $A_i O$ átmérőjű k_i körnek az n -szöggel való közös részét

lefedi a $\bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \gamma_{ij}$.

Ehhez elég azt belátni, hogy az $A_i A_j$, $A_i A_{j+1}$ ($i \neq j$) húrokhoz tartozó γ_{ij} és γ_{ij+1} lencsék Γ_{ij} , Γ_{ij+1} határainak (A_i -től különböző) közös P pontja rajta van a k_i körön.

Az $A_i A_j$ húr M , az $A_i A_{j+1}$ húr N felezőpontja az $A_i O$ átmérőjű k_i körön van. Mivel

$$A_j A_i P \triangleleft = P A_{j+1} A_i \triangleleft$$

és

$$A_{j+1} A_i P \triangleleft = A_i A_j P \triangleleft,$$

mert az érintőszárú kerületi szög egyenlő az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szöggel, ezért

$$A_i A_j P \triangleleft \sim A_{j+1} A_i P \triangleleft,$$

de akkor a hasonlóság a PM -hez a PN -t rendeli, s ezért

$$A_i M P \triangleleft = P N A_{j+1} \triangleleft,$$

azaz az $A_i M P N$ négyszög húrnégyszög.

Az A_i ($i=1, 2, \dots, n$) csúcsokhoz tartozó k_i körök közül bármely két, szomszédos A_i, A_{i+1} csúcsokhoz tartozó kör egymást az O középpontban, továbbá az $A_i A_{i+1}$ oldal felezőpontjában metszi. E köröknek az n -szöggel való közös részeinek egyesítése tehát fedi a szabályos n -szöget.

Ezzel beláttuk, hogy az n -szög bármely csúcstól különböző P pontja legalább egy γ_{ij} lencsének eleme, s ezért

$$\pi - \frac{\pi}{n} \equiv A_i P A_j \triangleleft \equiv \pi,$$

ahol az egyenlőség csakis akkor áll, ha P vagy a lencse Γ_{ij} ívének, vagy az $A_i A_j$ húr belsejének pontja.

Zsidó György, Kolozsvár

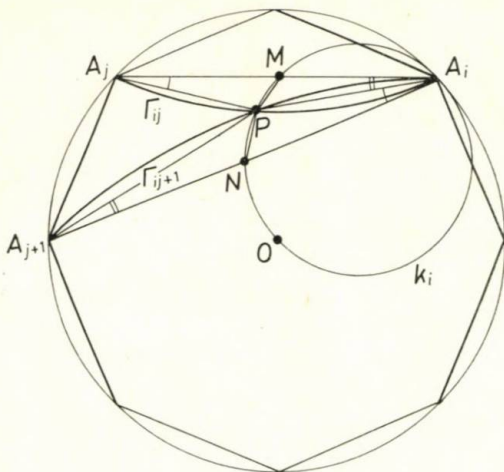
A megoldók száma: 6.

1031. Egy ország n városa közül bármely kettőt közvetlen repülőjárat vagy hajóút köt össze. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik városból bármelyik városba eljuthatunk csak repülön vagy csak hajón utazva is!

Kvant

Megoldás: Tekintsük az ország városait egy G gráf szögpontjainak. A gráf két szögpontját összekötő élt színezzük pirossal, illetve kékkel, ha a nekik megfelelő városokat közvetlen repülőjárat, illetve hajóút köti össze. Mivel a városok közül bármely kettőt közvetlen repülőjárat vagy hajóút köt össze, ezért a teljes gráf minden éleit kiszíneztük. Nevezzük piros, illetve kék gráfnak és jelöljük P -vel, illetve K -val G -nek azt a részgráfját, amely G minden szögpontját és piros, illetve kék éleit tartalmazza. Azt kell bizonyítanunk, hogy P vagy K összefüggő.

Tegyük fel, hogy P nem összefüggő. P komponenseit jelöljük $P_1, P_2, \dots, P_k$ -vel ($k > 1$). Azt kell bizonyítanunk, hogy ekkor K összefüggő, azaz bármely két szögpontja egymásból úttal elérhető. Ha nem ugyanabba a P_i -be ($1 \leq i \leq k$) tartozó két szögpontot szemelünk ki, akkor azokat K -ban él köti össze, hiszen G minden éleit kiszíneztük a két szín valamelyikével. Ezért a két szögpont K -ban úttal elérhető. Ha A és B ugyanabba a P_j -be ($1 \leq j \leq k$) tartozó két szögpont, akkor legyen G -nek egy tetszőleges, de P_j -be nem tartozó szögpontja C (ilyen van, hiszen P nem össze-



függő). K -nak biztosan éle az AC és a CB , ez viszont bizonyítja, hogy A és B , K -ban egymásból úttal elérhető. Tehát K összefüggő.

Csorba Ferenc, Győr,
Imolya Sándor, Hódmezővásárhely,
Polcz Katalin, Pécs.

A megoldók száma: 9.

1032. Melyek azok a pozitív valós számok, amelyek kielégítik az

$$x^{\frac{1}{n} \frac{y}{z}} + y^{\frac{1}{n} \frac{z}{x}} + z^{\frac{1}{n} \frac{x}{y}} = 3$$

egyenletet?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Az egyenletet hárommal osztva, s alkalmazva a számtani és mértani középre ismert összefüggést:

$$(*) \quad 1 = \frac{x^{\frac{1}{n} \frac{y}{z}} + y^{\frac{1}{n} \frac{z}{x}} + z^{\frac{1}{n} \frac{x}{y}}}{3} \geq \sqrt[n]{x^{\frac{1}{n} \frac{y}{z}} \cdot y^{\frac{1}{n} \frac{z}{x}} \cdot z^{\frac{1}{n} \frac{x}{y}}}.$$

A $(*)$ jobb oldalán a gyökjel alatti kifejezés viszont 1, hiszen természetes logaritmusára

$$(\ln y - \ln z) \ln x + (\ln z - \ln x) \ln y + (\ln x - \ln y) \ln z = 0$$

adódik.

Ezek szerint a számtani és mértani közép megegyezik, ez azonban csak akkor áll fenn, ha

$$x^{\frac{1}{n} \frac{y}{z}} = y^{\frac{1}{n} \frac{z}{x}} = z^{\frac{1}{n} \frac{x}{y}} = 1.$$

Pozitív valós számok hatványa azonban akkor és csak akkor 1, ha vagy az alap 1, vagy a kitevő 0. Ennélfogva a megoldások

(1) $x = y = z$ tetszőleges pozitív számok,

vagy

(2) x, y, z közül kettő 1-gyel egyenlő, a harmadik tetszőleges pozitív szám.

Cseh László, Kolozsvár
Merényi Imre, Kolozsvár

Megjegyzés: Az n ismeretlenes

$$n = x_1^{\frac{\ln x_2}{x_3}} + x_2^{\frac{\ln x_3}{x_4}} + \dots + x_{n-2}^{\frac{\ln x_{n-1}}{x_n}} + x_{n-1}^{\frac{\ln x_n}{x_1}} + x_n^{\frac{\ln x_1}{x_2}}$$

egyenlet megoldása a pozitív valós számok halmazán, a fentihez teljesen hasonló módon történik. Ennek megoldásai:

(1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ tetszőleges pozitív valós szám,

(2) x_i rögzített i -re tetszőleges pozitív valós szám, a többi $x_j = 1$ ($i \neq j$).

Az is látható, hogy ha az x_i kitevőjét, $\ln \frac{x_j}{x_k}$ -t úgy választjuk meg, hogy $\prod \frac{x_j}{x_k} = 1$ legyen, vagyis az argumentumok szorzatának számlálója és nevezője az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek egy-egy permutációjuk szerinti szorzata legyen, akkor ugyanezeket a megoldásokat kapjuk, ha valamennyi $\frac{x_j}{x_k}$ hányadosban $j \neq k$. Nemkülönb, bármely e -től különböző alapú logaritmus esetére is.

Bencze Mihály, Brassó
Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 15.

1033. Legyen $P(x)$ egy legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom. Jelölje $n(P)$ mindazon k egész számok számát, amelyekre $P^2(k) = 1849$. Igazoljuk, hogy

$$n(P) - \text{grad}(P) \leq 86,$$

ahol $\text{grad}(P)$ a polinom fokszámát jelöli.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás:

$$P^2(k) = 1849$$

akkor és csak akkor, ha

$$(P(k)+43)(P(k)-43) = 0.$$

Jelölje $Q(x)$, illetve $R(x)$ a $P(x)+43$, illetve a $P(x)-43$ polinomot. Ezekkel

$$R(x) = Q(x) - 86.$$

Két eset lehetséges:

(1) A $Q(x)$ és $R(x)$ polinomok közül legfeljebb az egyiknek van egész gyöke. Ekkor

$$n(P) \leq \text{grad}(P).$$

(2) Mind a $Q(x)$, mind az $R(x)$ polinomnak van zérushelye az egész számok halmazán. Tegyük fel, hogy a $Q(x)=0$ egyenletnek m darab különböző egész gyöke van: $x_1, x_2, \dots, x_m$. Ekkor

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)T(x),$$

ahol x_i egész ($i=1, 2, \dots, m$) és $\text{grad } T = \text{grad } Q - m \geq 0$. Ezek szerint

$$R(x) = 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)T(x) = 86.$$

De

$$86 = 1 \cdot 2 \cdot 43,$$

s ezért a 86 legfeljebb négy különböző egész szám szorzataként írható fel. Ennélfogva $Q(x)$ -nek legfeljebb négy különböző egész gyöke lehet. Hasonlóan igazolható, hogy $R(x)$ -nek sincs több, különböző egész gyöke.

Tehát ez esetben

$$n(P) \leq 8.$$

Így a feladat állításánál többet igazoltunk, nevezetesen beláttuk:

$$n(P) \leq \max\{\text{grad}(P), 8\}.$$

Cseh László, Kolozsvár,
Merényi Imre, Kolozsvár

A megoldók száma: 3.

1034. Az A szabályos hétszög második, illetve harmadszomszéd csúcsaira illeszkedő átlói egy-egy B , illetve C szabályos hétszöget határolnak. Bizonyítsuk be, hogy B harmadszomszéd átlói ugyanazt a szabályos hétszöget határolják, mint a C másodsomszéd átlói! Általánosítsuk feladatunkat!

Kárteszi Ferenc, Budapest

Megoldás: A feladat egy általánosítása: Az A_n szabályos n -szög — ha $n > 5$ és páratlan — $\frac{n-1}{2}$ különböző hosszúságú húrt (oldal vagy átló) feszít ki. Nevezük ezeket rendre $0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1$ indexű húnak.

A 0 indexű húr a sokszög oldala. A k indexű húrok határolta sokszöget k indexű övnek mondjuk. A szabályos n -szög k indexű övének l indexű öve az l indexű öv k indexű övével azonos (az ábrán $k=1, l=2$). Ezt fogjuk igazolni, hiszen $n=7, k=1$ és $l=2$ választásra eredeti feladatunkat kapjuk. Először is megjegyezzük, hogy bármely két k, l indexű öv hasonló, hiszen mindegyikük az A_n szabályos sokszög O középpontjára n -ed rendben forgásszimmetrikus, tehát ugyancsak szabályos n -szög. Ennélfogva mindig van olyan O középpű forgatva nyújtás, amely a két övet egymásba viszi. Másodszor: A k indexű öv a 0 indexű övből a közös O középpont körüli $\frac{\pi}{n} \cdot k$ szögű, λ_k arányú forgatva nyújtással adódik. A k indexű öv l indexű övét pedig $\frac{\pi}{n} \cdot l$ szögű O középpű, λ_l arányú forgatva nyújtás adja a k indexű övből. (Lásd ábrát a borítón!)

Az O középpű forgatva nyújtások kommutatív csoportot alkotnak, tehát a $\frac{\pi}{n}(k+l)$ szögű $\lambda_l \cdot \lambda_k$ arányú forgatva nyújtás A_n -t a k indexű öv l indexű övébe, az ugyanilyen szögű $\lambda_k \cdot \lambda_l$ arányú forgatva nyújtás pedig az l indexű öv k indexű övébe viszi, és ezt kellett bizonyítanunk

Csaba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora (1029—1034.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1029., 1031.); Bagi Gábor, Barcs (1029., 1031.); Bencze Mihály, Brassó (1029., 1032., 1033.); Bíró Béla, Barót (1029., 1032.); Cseh László, Kolozsvár (1029., 1030., 1032—1034.); Csorba Ferenc, Győr (1029., 1031., 1032., 1034.); Hárszatakiné Dékány Veronika, Budapest (1029.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1029—1032.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1029., 1031., 1032.); Kondor Judit, Budapest (1029., 1032.); Kováts Péter, Kaposvár (1029—1031.); Merényi Imre, Kolozsvár (1029., 1032—1034.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1029., 1032.); Pataki János, Szatmár (1029., 1031., 1032.); Polcz Katalin, Pécs (1029., 1031., 1032.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1029., 1031.); Szánthó Gyula, Gyula (1029—1032.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1029., 1032., 1034.); Varga István, Nagyszalonta (1029., 1030., 1032.); Zsidó György, Kolozsvár (1029., 1030., 1032., 1034.).

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

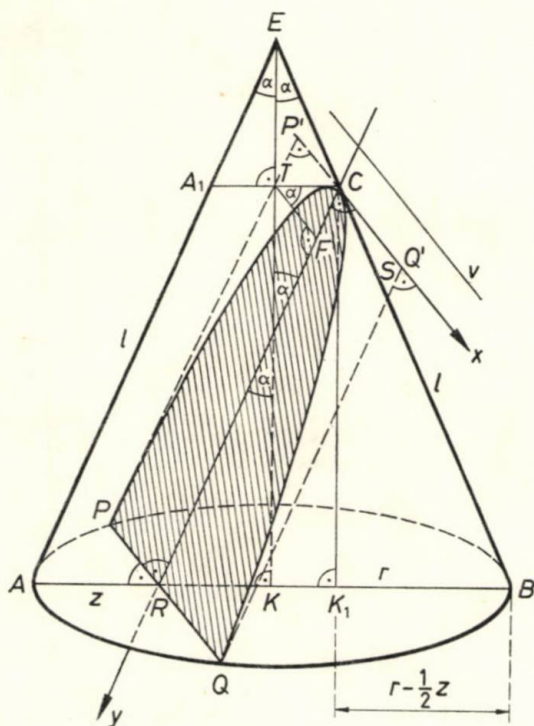
<i>Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához</i> (83 015)	45,—
<i>Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához</i> (83 028)	51,—
Kovácsné—Novákné—Sztrókainé—Szerediné: <i>Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 7.</i> (83 022)	52,—
Gáll Éva: <i>Vigyázat! Csak gyerekeknek</i> (1998/1)	9,—
Gáll Éva: <i>Matematikaország határán</i> (1998/2)	20,—
Lukács Ottó: <i>Gyerekmatek</i> (1995/5)	17,—
Hámori Miklós: <i>Halmazok. Matematikai logika</i> (1991)	10,—
Hámori Miklós: <i>Tanulás és tanítás számítógéppel</i> (52 983)	29,—
Korovkin: <i>Egyenlőtlenségek</i> (29 238)	7,—

Beszerezhető

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Tankönyvboltban (1051 Bp., Október 6. u. 8.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



2

984. április * XXXI. évfolyam

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAI LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNÉ, SZTÁNÓ TAMÁS

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211—200

84-520 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalvá-
nyon, valamint átutalással a KHI 215—96 162 pénzforgalmi
jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közzöljük lakásuk és munkahelyük pontos
címét, valamint *személyi számukat* is!

TARTALOM

<i>Dr. Révész Józsefné—Dr. Sümei Lászlóné:</i> Év végi felmérés az általános iskola 8. osztályában	33
<i>Dr. Rédling Elemér:</i> A sík egybevágóságai- nak származtatásáról	38
<i>Bereznai Gyula:</i> Néhány gráfelméleti tétel egy töről eredeztetése	41
<i>Dr. Horváth Miklós:</i> Fermat érintőmeg- határozási módszeréről	44
<i>Lehel Jenő:</i> Jelentés a Bolyai János Mate- matikai Társulat matematikatanárok szá- mára rendezett 1983. évi versenyéről....	46
Új könyvek	52
FELADATOK	53

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Д-р Ревес Йозефне — Д-р Шюмеги Лас- лоне:</i> Переходный обмер в восьмом классе начальных школах	33
<i>Д-р Редлинг Элемер:</i> О произведении конгруэнций плоскости	38
<i>Березнаи Дюла:</i> Возведение несколько теорем теории графов к тому же само- му корню	41
<i>Д-р Хорват Миклош:</i> О методе Ферма для определения касательной	44
<i>Лехел Енё:</i> Реферат о соревновании 1983 г. Математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики	46
Новые книги	52
ЗАДАЧИ	53

INHALT

<i>Frau, Margit Révész (geb.: Szabó)—Frau, Margit Sümei (geb.: Sal):</i> Eine Ermes- sung am Schuljahrsende in der 8. Klasse der Grundschule.....	33
<i>Dr. Rédling, Elemér:</i> Über die Herleitung der Kongruenzen der Ebene	38
<i>Bereznai, Gyula:</i> Zurückführung einiger gra- phentheoretischen Sätze zu einem und demselben Stamm	41
<i>Dr. Horváth, Miklós:</i> Über die Tangenten- bestimmungs-Methode von Fermat.....	44
<i>Lehel, Jenő:</i> Bericht über den Wettbewerb der Bolyai János Mathematischen Gesell- schaft für die Mathematiklehrer im Jahre 1983	46
Neue Bücher	52
AUFGABEN	53

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. RÉVÉSZ JÓZSEFNÉ—DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ

szakfelügyelők
Debrecen

Év végi felmérés az általános iskola 8. osztályában

A városunk általános iskoláiban folyó matematikaoktatás helyzetéről minden év végén írásos szakfelügyelői beszámolót készítünk. A reális helyzetelemzéshez a tanév folyamán szerzett tapasztalatokon kívül a május hónapban — tehát az ismétlési időszakban — íratott felmérések eredményeinek értékelése is hozzátartozik. Ezt a munkát évről évre rendszeresen végezzük, általában reprezentatív jelleggel, ez mintegy 300—400 tanuló felmérésben való részvételét jelenti. Célja egyrészt az, hogy — az előbb jelzettek alapján — keresztmetszetében adjon képet az elért eredményekről, hiányosságokról, másrészt az, hogy a tapasztalatokról a tanév eleji szakmai tanácskozáson visszajelzést tudjunk adni a nevelőknek és megjelöljük az ebből adódó feladatokat.

A felmérések során eddig az új tanterv lépcsőzetes bevezetésének tapasztalatait kísértük figyelemmel. A különböző — nem hivatalos — forrásokból nyert visszajelzések alapján az elmúlt tanév elején felvettük a kapcsolatot szakmunkásképző intézeteink munkaközösség-vezetőivel az eredményesebb együttműködés érdekében. Az így szerzett tapasztalatokat, a tanév elején végzett felméréseik alapján nyert információkat az őszi területi továbbképzésen ismertettük a nevelőkkel. Az elmúlt évek során a szakmunkásképzőkbe „elégséges” érdemjeggyel kerülő tanulók száma növekedett, és ez az elégséges érdemjegy nem minden esetben fed „elégséges tudást”.

Ezek a komoly negatívumok önvizs-

gálódásra készítettek, ezért 1983-ban a tanév végén a város valamennyi iskolájának 8. osztályaiban végeztük a felmérést.

A feladatok összeállításánál figyelembe vettük, hogy nyolcadikos tanulóink többsége még az ideiglenes tanterv szerint tanulta a matematikát. További korlátozást jelentett a felmérések 45 perces időtartama.

A felmérés minden iskolában ugyanazon a napon történt; a tanulók feladatlapot kaptak (A és B változatban), azon dolgoztak, a felügyeletet az iskolavezetés biztosította.

A feladatlap összeállításánál alapvető szempont volt a számfogalom kialakulásának és az alpműveletek végzésének vizsgálata racionális számkörben. Ezen túl az egyszerű, numerikus egyenlet megoldását, a testek mozgásával kapcsolatos szöveges feladat megoldását, valamint — területmeghatározáshoz kapcsolva — a százalékszámítást vizsgáltuk.

A feladatok értékelését lépéseire bontva végeztük, ez képezi a felmérés értékelésének az alapját.

A továbbiakban közreadjuk a tanulók számára kitűzött feladatokat, *feladatonként* közöljük az elemzés szempontjait, a részfeladatok teljes megoldásáért adott pontszámot, az eredményességet %-ban, valamint az iskolák teljesítményeinek halmazából a szélső értékeket.

Az összesítés 22 általános iskola 1371 8. osztályos tanulójának munkája alapján készült.

A. 1. a) Rendezd nagyság szerint sorba a következő számokat!

$$\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{4}{10}, \frac{11}{4}, -\frac{9}{5}, \frac{1}{13}.$$

b) Jelöld meg helyüket a számegyenesen!

B. 1. a) Rendezd nagyság szerint sorba a következő számokat!

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{6}{10}, \frac{13}{5}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{15}.$$

b) Jelöld meg helyüket a számegyenesen!

1. feladat

- | | |
|--------------------------------------|----------|
| a) Sorba rendezés (1 pont): | 69,5%, |
| b) ábrázolás számegyenesen (6 pont): | 63,9%, |
| A tanulók teljesítménye: | 64,7%. |
| Szélső értékek: | 40%—90%. |

Már az 5. osztályban minimumszintű tantervi követelmény: „Tudják megállapítani, hogy két szám közül melyik nagyobb, helyüket megkeresni a számegyenesen!”.

A teljesítmények ismeretében továbbra is szükséges felszínen tartanunk a számegyenesen való ábrázolást folyamatos ismétléssel, természetesen nem direkt formában, hanem más típusú feladatok megoldásához kapcsolva, pl. egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

Leggyakoribb hiba a számegyenes nem pontos, nem célszerű beosztása. A pontoságra nevelésnek ezen a téren is kiemelt feladatnak kell lennie!

A. 2. Írd fel tizedes tört alakban:

$$a) \frac{3}{4}, \quad b) \frac{5}{3}, \quad c) \frac{2}{5}, \quad d) \frac{81}{100}.$$

B. 2. Írd fel tizedes tört alakban:

$$a) \frac{2}{3}, \quad b) \frac{4}{5}, \quad c) \frac{5}{4}, \quad d) \frac{125}{100}.$$

2. feladat

Átalakítás tizedes törtté (4 pont).

- | | |
|--------------------------|-----------|
| A tanulók teljesítménye: | 92,9%. |
| Szélső értékek: | 86%—100%. |

Úgy érezzük, hogy a tantervi követelményeknek — amelyek szerint: „Legyenek képesek tört számokat egyik alakról a másikra hozni!” — eleget tettünk. A kevés hiba az osztás helytelen elvégzéséből adódott!

A. 3. Írj legalább egy olyan számot, amelyre igaz:

- a) $-\frac{1}{100}$ -nál nagyobb negatív racionális szám;
- b) olyan természetes szám, amelyiknek a reciproka kisebb, mint $\frac{1}{23}$.

B. 3. Írj legalább egy olyan számot, amelyre igaz:

a) $-\frac{1}{50}$ -nél kisebb negatív racionális szám;

b) olyan természetes szám, amelyiknek a reciproka nagyobb, mint $\frac{1}{32}$.

3. feladat

a) Negatív racionális szám (1 pont): 53,6%.

+ 1 pont, ha több számot is felsorolt.

b) Reciprok (1 pont): 52,2%.

+ 1 pont, ha több számot is felsorolt.

A tanulók teljesítménye: 60%.

Szélső értékek: 34%—91%.

A. 4. Milyen számokra igaz, hogy nagyobbak -2 -nél és kisebbek 12 -nél

I. a természetes számok között,

II. az egész számok között?

B. 4. Milyen számokra igaz, hogy nagyobbak -5 -nél és kisebbek 10 -nél

I. a természetes számok között,

II. az egész számok között?

4. feladat

I. Természetes számok halmazán (2 pont): 59,8%,

II. egész számok halmazán (2 pont): 71,3%.

A tanulók teljesítménye: 65,5%.

Szélső értékek: 37%—85%.

A 3. és a 4. feladattal kapcsolatban a tantervi követelmények: „Legyenek képesek a tanulók a racionális számok halmazát részhalmazokra bontani, egyenlőtlenségek megoldását adó számok halmazát jelölni!”

Néhány gyakori hiba, mely a tanulók teljesítményét rontotta:

— két feltétel egyidejű teljesítésének hiánya,

— a véges halmaznak nem minden elemét sorolták fel,

— a szigorú egyenlőtlenség megoldásai között a határokat is szerepeltették,

— a természetes számok halmazába a törtszámokat is besorolták.

Kevésbé biztonságosan mozognak a tanulók a természetes számok halmazán, erre a hiányosságra a jövőben fokozottan oda kell figyelnünk!

A. 5. Végezd el az alábbi műveleteket:

$$a) -1,5 : 0,045 = \quad b) \left(\frac{3}{4} - 0,375\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) =$$

B. 5. Végezd el az alábbi műveleteket:

$$a) 3,51 : (-0,065) = \quad b) \left(-\frac{3}{4} + 0,375\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) =$$

5. feladat

a) 1. Előjel meghatározása (1 pont): 73,5%,

2. bővítés (1 pont): 76,2%,

3. osztás (1 pont): 73%;

b) 1. átalakítás (1 pont):	72 %,
2. kivonás (1 pont):	56 %,
3. szorzat előjelének meghatározása (1 pont):	73,9 %,
4. szorzás (1 pont):	57,8 %.
A tanulók teljesítménye:	69 %.
Szélső értékek:	56 %—90 %.

Az alapműveletek törtszámokkal történő elvégzésekor — érdekes módon! — nem az osztás, hanem az összevonás és a szorzás során adódott több hiba, hiányosság. Pótlásáról — problémába ágyazva — folyamatos ismétlésként gondoskodnunk kell!

Az elemzés során feltűnt, hogy esetünkben, amikor problémába ágyazva tört átalakítását is kell végezni a műveletek elvégzése előtt, a teljesítmény csak 72 %-os volt, szemben a 2. feladatbeli 93 %-kal.

A. 6. Oldd meg!

$$\frac{x}{5} + 1 = \frac{x}{3}.$$

B. 6. Oldd meg!

$$\frac{2}{3}x - 5 = \frac{x}{2}.$$

6. feladat

a) Közös nevező (1 pont):	78,4 %,
b) gyök meghatározása (2 pont):	64 %,
c) ellenőrzés (1 pont):	40,5 %.
Az a)-ra és b)-re a tanulók teljesítménye:	68,8 %.
Szélső értékek:	53 %—95 %.

„Az elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldásához szükséges azonos átalakítások végzésében, egyenletek megoldásában” készségszintet, „az egyenlet megoldásának ellenőrzésében” jártasságot ír elő az ideiglenes tanterv.

Valamivel magasabb volt az új tanterv szerint tanuló 8. osztályosok teljesítménye, ez remélhetőleg a későbbi 8. osztályok esetében is mutatkozni fog. Külön figyelmet kell fordítanunk az ellenőrzés igényének felkeltésére!

A. 7. Két, egymástól 20 km-re levő helységből egyszerre indul el egy-egy jármű: az egyik 30 km/h, a másik 10 km/h sebességgel halad. Mekkora távolságban lesznek egymástól $\frac{2}{5}$ óra múlva, ha

- egymással szemben haladnak azonos útvonalon;
- egy irányban haladnak úgy, hogy a nagyobb sebességű jármű a kisebb sebességű jármű kiindulási helye felé közeledik?

B. 7. Két, egymástól 20 km-re levő helységből egyszerre indul el egy-egy jármű: az egyik 30 km/h, a másik 10 km/h sebességgel halad. Mekkora távolságra lesznek egymástól $\frac{3}{5}$ óra múlva, ha

- egymással szemben haladnak azonos útvonalon;
- egy irányban haladnak úgy, hogy a kisebb sebességű jármű a nagyobb sebességű jármű kiindulási helye felé közeledik?

7. feladat

a) Megoldási terv (3 pont):	40%,
b) 1. út (1 pont):	48,8%,
c) 2. út (1 pont):	36,5%,
d) rajz 1. (1 pont):	58,5%,
e) rajz 2. (1. pont):	37,4%.
A tanulók teljesítménye:	43%.
Szélső értékek:	20%—68%.

A feladat megoldása során nyújtott teljesítmény elmarad a remélttől. Komoly hiányosságnak érezzük, hogy a tanulók nagy többsége a szöveget nem tudja „lefordítani” a matematika nyelvére, mindössze 40% ad megoldási tervet, ír fel egyenletet! Ennek a hiányosságnak a felszámolása nemcsak a 8. osztály feladata, mert már az első osztálytól kezdve folyamatosan kell szoktatni a tanulókat a szöveges feladatok matematikai szimbólumokkal való lejegyzésére, amit az érthető, egyszerű ábrák is segítenek.

Fizikaórákon erősíteni és mélyíteni kell az út, az idő, a sebesség fogalmát, összefüggéseket; a külső koncentráció realizálása további feladatot ad a szakos nevelőknek!

- A. 8. Egy téglalap a oldalát ($a=1,5$ dm) 10%-kal, b oldalát ($b=20$ cm) 20%-kal megnöveltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti téglalap területe? (Rajzolni szabad!)
- B. 8. Egy téglalap a oldalát ($a=10$ cm) 20%-kal, b oldalát ($b=2,5$ dm) 10%-kal növeltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti téglalap területe? (Rajzolni szabad!)

8. feladat

a) Megoldási terv (3 pont):	41,6%,
b) 1. oldal (1 pont):	54,8%,
c) 2. oldal (1 pont):	53,6%,
d) terület (1 pont):	52,2%,
e) növekedés százaléokban (1 pont):	35%.
A tanulók teljesítménye:	45,6%.
Szélső értékek:	24%—65%.

A megoldás elemzésének tapasztalatai:

- A lassabban, bizonytalanul dolgozó tanulók el sem jutottak az utolsó feladat megoldásának kísérletéig!
- Akik eljutottak, azok egy része túl egyszerűnek vélte a problémát, nem gondolta át az oldalak és a terület kapcsolatát, elhamarkodottan válaszolt.
- A megoldási tervben nem jelölték a területnövekedést.
- A területszámítás módja helyes, de ha nem jól számolták ki az oldalak hosszát, akkor a terület meghatározása is hibás!

A felmérés során nem élhettünk a teljességre való törekvés igényével, ezt az egy tanítási óra időkerete nem tette lehetővé. Úgy gondoljuk, hogy ennek ellenére néhány fontos terület vizsgálatára azért sor került, és a tapasztalatok segítséget adhatnak munkánk eredményesebbé tételéhez.

Ez úton is megköszönjük a felmérés lebonyolításában és értékelésében részt vevő és segítséget nyújtó kartársak önzetlen munkálkodását, amellyel lehetővé tették a felmérés hatékonyságának emelését.

A sík egybevágóságainak származtatásáról

I. Bevezetés

Cikkünkben az egybevágósági transzformációk bizonyos belső összefüggéseinek a középiskolai tanításban megjelenő vetületével foglalkozunk. A sík egybevágóságait a tér egybevágóságaiból származtatjuk, majd elemezni fogjuk e származtatásmód didaktikai előnyeit.

Mivel témakörünkben a szakirodalom szóhasználata nem egyöntetű, ezért néhány elnevezés cikkünkben használt változatát is közöljük.

Geometriai transzformációnak — röviden: *transzformációnak* — olyan *függvényt* nevezünk, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

A síknak, illetve a térnek önmagára

való távolságtartó leképezéseit a *sík*, illetve a *tér egybevágósági transzformációinak* nevezzük. Most ilyen transzformációkkal foglalkozunk. (A sík egybevágóságait síkbeli egybevágóságoknak is mondjuk.)

A geometriai transzformációk jól jellemezhetők *fixelemeikkel* és ezek *kölcsönös kapcsolataival*. *Fixpont*, *fixegyenes*, *fixsík* olyan pont, egyenes, illetve sík, amelynek *képe önmaga*. Azt a fixpontot, amelyre illeszkedő minden egyenes fix, *centrumnak* (középpontnak) mondjuk. Az az egyenes, amelynek minden pontja fix, *tengely*.

Cikkünkben a P pont, az e egyenes, az S sík képét rendre P' , e' , S' jelöli.

II. A sík és a tér egybevágóságainak típusai

Az egybevágóságok körében alapvető fontosságúak a *típusokat* megadó tételek. A továbbiakban ezekre mi is hivatkozni fogunk, így kitérünk rájuk. A tételleket most nem bizonyítjuk, a részletes tárgyalást pl. az [5], a [6], vagy pedig a [9] alatt említett munkákban megtalálhatjuk.

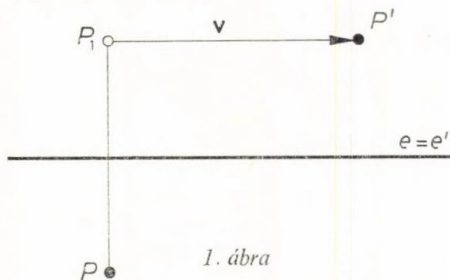
A sík egybevágóságainak alaptípusai az *eltolás*, a *pont körüli elforgatás* és a *tengelyes tükrözés*. Igaz ugyanis a következő tétel:

T₁ *A sík egybevágóságai a következők: eltolás, pont körüli elforgatás, tükrözés-eltolás.*

A *tükrözés-eltolás* egy e egyenesre vonatkozó tükrözés és egy v vektorral megoldható eltolás összetétele, ahol $v \parallel e$ (1. ábra). Az egyenesre való tükrözés ennek speciális esete, az eltolás azonban nem.

A sík azonos leképezése az eltolásnak és az elforgatásnak is speciális esete.

Az eltolás és a pont körüli elforgatás a körüljárás irányát megtartja (ezek az



1. ábra

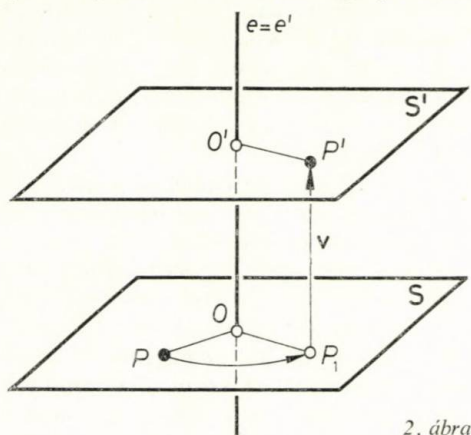
ún. síkmozgások), a tükrözés-eltolás azonban megváltoztatja.

A tér egybevágóságainak *alaptípusai* az *eltolás*, a *tengely körüli elforgatás* és a *síkra vonatkozó tükrözés*. A középiskolában tehát elsősorban ezeket célszerű tanítani. Ugyanis a tér egybevágóságai az alaptípusokból már könnyen „felírhatók”, hiszen igazolható a következő tétel:

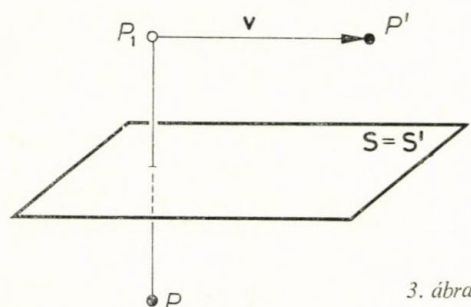
T₂ *A tér egybevágóságai: csavartranszformáció, síktükrözés-eltolás, síktükrözés-elforgatás.*

A *csavartranszformáció* a tér olyan egybevágósága, amely egy e egyenes körüli elforgatás és egy olyan v vektorral meg-

adható eltolás kompozíciója, ahol $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}$ (2. ábra). Az eltolást és a tengely körüli



2. ábra

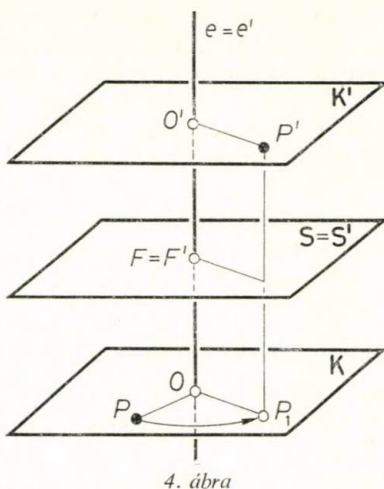


3. ábra

elforgatást — így a tér azonos leképezését is — a csavartranszformáció speciális esetének tekintjük.

A *síktükrözés-eltolás* egy S síkra való tükrözés és egy olyan $\mathbf{v}$ vektorral megadott eltolás összetétele, ahol $\mathbf{v} \parallel S$ (3. ábra). A síkra való tükrözés ennek speciális esete, a tér eltolása azonban nem.

A *síktükrözés-elforgatás* egy S síkra való tükrözés és egy e egyenes körüli elforgatás szorzata, ahol $e \perp S$ (4. ábra). A



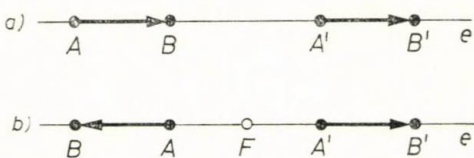
4. ábra

síkra vonatkozó tükrözés ennek speciális esete, a tengely körüli elforgatás azonban nem.

A csavartranszformáció az orientációt megtartja (térmozgás), a T_2 -ben említett másik két transzformáció pedig megváltoztatja.

A tételekben felsorolt transzformációk egy-egy típust jelölnek.

Megemlítjük, hogy hasonlóképpen elemezhetnénk az *egyenesnek önmagára való egybevágósági* leképezéseit is. Most kétféle transzformációt különböztethetünk meg: az *eltolást* és a *pontra vonatkozó tükrözést* (5. ábra).



5. ábra

III. A sík egybevágóságainak származtatása

1. A következőkben a sík egybevágóságainak egy *egységes szemléletű* származtatását mutatjuk be. Utalunk e származtatásmód didaktikai előnyeire is.

Itt csupán az alapelvet vázoljuk, amelyet azután tanórán lehet „aprópénzre váltani”. Részletesebb feldolgozást pl. a [7]-ben vagy a [10]-ben találhatunk.

Gondoljunk a térnek egy olyan *egybevágóságára*, amelynek *van fixsíkja*. Szűkítsük le a tér egybevágóságának értelmezési tartományát erre a síkra. Így egy *síkbeli egybevágósághoz* jutunk.

Megmutatjuk, hogy a *csavartranszformáció speciális eseteiből* a sík *egybevágóságainak* mindegyik típusa megkapható.

Tekintsük a *tér eltolását*. Itt az eltolás vektorával párhuzamos egyenes mindig fixegyenes. Minden fixegyenesre illeszkedő sík fixsík. (Azonos leképezés esetén minden térelem fix.) A tér eltolása bármely fixsíkban síkbeli *eltolást* állít elő.

A *t tengely körüli elforgatást* tekintve a *t*-re merőleges síkok mind fixsíkok. A tengely körüli elforgatás ezek mindegyikén *pont körüli elforgatást* indukál. Ha a *t* tengelyű elforgatás szöge 180° , akkor a *t*-re merőleges síkon éppen *középpontos tükrözés* adódik. A 180° -os elforgatás esetén azonban a *t* tengelyre illeszkedő síkok is fixek. Ezeken *tengelyes tükrözés* jön létre.

Látható, hogy a tananyagban szereplő minden síkbeli egybevágóság (tengelyes tükrözés, eltolás, középpontos tükrözés, pont körüli elforgatás) származtatható a *tér eltolásából* vagy *tengely körüli elforgatásából*.

A mondott tárgyalási menetbe a *tükrözés-eltolás* származtatása is beépíthető. Tekintsük ugyanis az olyan csavartranszformációt, ahol az elforgatás szöge 180° . Most a csavartranszformációban szereplő elforgatás *e* tengelyére illeszkedő síkok mind fixek. Egy-egy ilyen fixsíkban *tükrözés-eltolást* kapunk. (Speciális esetben *egyenesre vonatkozó tükrözéshez* jutunk. A tükrözés tengelye az *e* egyenes.)

Figyelembe véve a T_1 tételt, az eddig elmondottakból következik már, hogy *speciális csavartranszformációkból* a sík egybevágóságainak bármely típusa megkapható.

Nyilvánvaló az is, hogy ha valamely *adott* síknak egy önmagára való távolságtartó leképezését tekintjük, akkor ehhez mindig megadható olyan speciális csavartranszformáció, amelyből (az értelmezési tartomány megfelelő leszűkítésével) a szóban forgó síkbeli leképezés már származtatható.

A középiskolában az egyes transzformációkat többnyire *egymástól elkülönítve* vezetik be. A most vázolt felépítés azonban *feloldja az izoláltságot*. A közös származtatásmód egymáshoz *fűzi a sík*

különböző típusú egybevágóságait, összekapcsolja a tér- és a síkgeometriát, és lehetővé teszi azt is, hogy együttesen vezessük be a sík különböző egybevágósági transzformációit. Így *párhuzamba állíthatók* közös és eltérő tulajdonságaik. Mindez a tananyag alaposabb megértését is elősegítheti.

Ez a tárgyalásmód emellett *gazdaságos* is. Ha ugyanis előbb a tér néhány speciális egybevágóságát tárgyaljuk meg, s megállapítjuk ezek alapvető tulajdonságait, akkor már *könnyen* megkaphatjuk a síkbeli egybevágóságok legtöbb tulajdonságát is (így pl. az egyenes és képének a viszonyát). A *közös* tulajdonságok pedig *egyszerre* adódnak a sík *minden* egybevágóságára. (Mivel pl. a tér eltolása és tengely körüli elforgatása is szög- és párhuzamosságtartó leképezés, ezért *ugyanaz* érvényes a sík *minden* egybevágóságára.)

2. Mindezek mellett a sík egybevágóságait a tér *orientációváltó* egybevágóságaiból is származtatni lehet. (Ezt azonban inkább csak szakkörön érdemes megvitatni.)

Tekintsük ugyanis az *S* síkra vonatkozó tükrözés és az *S*-re merőleges *e* egyenes körüli elforgatás kompozícióját. (Ez a transzformáció *síktükrözés-elforgatás*.) Ennek a leképezésnek az *S* fixsíkja, ezen *pont körüli elforgatást* kapunk. Az elforgatás fixpontja az *S* és az *e* közös *F* pontja. Vegyük most a síktükrözés-elforgatásnak azt a két speciális esetét, amikor az *e* körüli elforgatás szöge 0° , illetve 180° . Ha az elforgatás szöge 0° , akkor a síktükrözés-elforgatás éppen az *S síkra vonatkozó tükrözés*. Ebben az esetben az *S*-re merőleges síkok is mind fixek, ezeken (síkbeli) *tengelyes-tükrözéshez* jutunk. (Itt az *S* síkon azonos leképezést kapunk.) Ha viszont az *e* körüli elforgatás szöge 180° , akkor a síktükrözés-elforgatás a térnek olyan *középpontos tükrözése*, amelynek *centruma* az *F* pont. Most az *F*-re illeszkedő síkok mind fixek, ezeken *F* centrumú síkbeli *középpontos tükrözés* áll elő.

Hasonló módon kaphatjuk meg a *síktükrözés-eltolásból* a síkbeli *eltolást* és *tükrözés-eltolást* is.

Itt említjük meg, hogy a sík egybevágóságaival analóg módon származtathatók a *sík hasonlósági transzformációi* is.

3. Nyilvánvaló, hogy a tananyagban — a bemutatottak mellett — az egybevágósági transzformációk más belső összefüggései is beépíthetők. Ilyen összefüggéseket fogalmaznak meg a következő tételek is:

T_3 A sík bármely egybevágósága megkapható legfeljebb három egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciójával.

T_4 A tér bármely egybevágósága előállítható legfeljebb négy síktükrözés összetételével.

Tételeinket pl. a T_1 -re, illetve a T_2 -re hivatkozva lehet belátni. (Egy más felépítésű tárgyalást a [6]-ban, illetve a [9]-ben mutatunk be.)

A T_3 tételre az [1] alatt említett tanterv is utal (lásd: 389. oldal).

Befejezésül J. S. BRUNER [3] alatt említett munkájára hívjuk fel a figyelmet. A szerző a mű 38. oldalán a következőket fejt ki:

Hiába tanítunk egyes izolált témákat. Ha a különböző kérdésköröket nem állítjuk egy ismeretág szélesebb strukturális összefüggéshálózatába, munkánk nem lesz gazdaságos. Először is: az ilyen jellegű tanulás rendkívül gátolja a tanulót korábbi ismeretei átalakításában. Másodszor: az olyan tanulás, amely nélkülözi az általános elvek felismerését, nélkülözni fogja az intellektuális örömet is. Harmadszor: az olyan ismeretet, amelynek nincs megfelelő összetartó struktúrája, a tanulók könnyen elfelejtik.

Ezek a gondolatok nyilvánvalóan a geometriai transzformációk tanítására is érvényesek.

IRODALOM

- [1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve*. Tankönyvkiadó, Bp. 1978.
- [2] *A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve*. Oktatási Minisztérium, 1978.
- [3] J. S. BRUNER: *Az oktatás folyamata*. Tankönyvkiadó, Bp. 1968.
- [4] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Bp. 1972.
- [5] HOLLAI M.—HORVÁTH J.—TEMESVÁRI Á.: *A sík és a tér egybevágósági és hasonlósági transzformációi*. (Tanulmányok a matematika tanítása köréből.) ELTE TTK kiadvány, 1978.
- [6] RÉDLING E.: *Az egybevágóság és a szimmetria kapcsolatáról*. Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, 1975.
- [7] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk bevezetése*. Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.
- [8] RÉDLING E.: *Egybevágósági transzformációk*. Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.
- [9] RÉDLING E.: *Az egybevágósági transzformációk rendszerezése. A logika néhány eleme*. Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1978.
- [10] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk*. Tankönyvkiadó, Bp. 1980.

BEREZNAI GYULA

főiskolai tanár

Nyíregyháza, Bessenyei György Tanárképző Főiskola

Néhány gráfelméleti tétel egy tőről eredeztetése

Ebben a dolgozatban az általános- és középiskolai tanárok számára egyaránt fontos — ha nem is a legfontosabb — elemi gráfelméleti tételek ismertetésével kívánunk foglalkozni. Célunk az lesz, hogy az n csúcspontot tartalmazó egyszerű összefüggő G_n gráf Euler-féle karakterisztikájából kiindulva annak egy-

szerű következményeiként jussunk el a gráf néhány lényeges tulajdonságának megismeréséhez. A dolgozat anyaga elsősorban továbbképzési célt szolgál, de szakköri témajavaslatnak is tekinthető.

Tárgyalásaink során G_n minden esetben n szögpontú egyszerű összefüggő gráfot fog jelölni, egyébként alkalmaz-

kodni fogunk az elemi gráfelméletben szokásos és ismertnek feltételezett terminológiához. A gráf élein és csúcsain kívül nagy szerepet fogunk tulajdonítani az általunk *elemi körnek* nevezett olyan köröknek is, amelyeknek egyetlen részgráfjuk sem kör, tehát amelynek nincs átlója.

Az n szögpontot, e élt és k elemi kört tartalmazó G egyszerű gráf (Euler-féle) karakterisztikájának fogjuk nevezni az $n - e + k = K(G)$ számot. Bebizonyítjuk, hogy az egyszerű G gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha karakterisztikája 1.

Egy és két szögpontú összefüggő gráf esetén állításunk azonnal belátható. Legyen indukciós feltevésünk az, hogy valamely n -re még $K(G_n) = 1$. Újabb szögpontot csak valamelyik élen vagy a gráfon kívül vehetünk fel. Ha az $(n+1)$ -edik csúcspontot valamelyik élen vesszük fel, ez az illető élt két részre osztja. Ebből az új csúcsból a csúcsok számának további növelése nélkül újabb élek csak a G_n gráfban már meglevő csúcsokhoz csatlakozhatnak, és minden ilyen él egyvel növeli az elemi körök számát. Az új G_{n+1} gráfban tehát az élek száma 1-gyel többel növekedett, mint az elemi körök száma, így tehát a karakterisztika nem változott. Ha pedig az $(n+1)$ -edik csúcsot a gráfon kívül vesszük fel, az összefüggőség biztosítása érdekében ezt éllel — esetleg élekkel — kell az eredeti gráf szögpontjával (szögpontjaival) összekötni. Az első ilyen él még nem hoz létre elemi kört, de minden további egyet-egyert igen, tehát G_{n+1} karakterisztikája ebben az esetben is 1 maradt.

Fordítva: ha a G gráf nem összefüggő, akkor véges számú összefüggő komponensből áll, s az előbbieket szerint minden komponens karakterisztikája 1. Mivel pedig a G gráf csúcsainak, éleinek és elemi köreinek száma a komponensek csúcsai, élei és elemi körei számának összegeként adódik, a gráf karakterisztikája a komponensek számával lesz egyenlő, s ebből állításunk másik része már egyszerűen következik.

Most bebizonyított tételünk közvetlen következményeinként adódnak az egyszerű összefüggő gráfok alábbi tulajdonságai:

Az n szögpontú egyszerű összefüggő G_n gráf éleinek száma nem lehet kisebb $(n-1)$ -nél. Az $e < n-1$ feltételezésből ugyanis $K(G_n) = n - e + k > n - (n-1) + k = k + 1$ következne, ami — összefüggő gráfról lévén szó — $k=0$ esetén is lehetetlen.

Ha a G_n gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Ha ugyanis $e \geq n$, akkor $K(G_n) = 1$ csak úgy teljesülhet, ha $k \geq 1$.

Ha a G_n gráf minden pontjának fokszáma legalább kettő, akkor a gráf tartalmaz kört. Az ilyen gráfban ugyanis $e \geq n$, mert minden csúcshoz legalább két él tartozik és minden él két csúcspontot köt össze. A $K(G_n) = 1$ tehát csak akkor lehet igaz, ha $k \geq 1$. Könnyű meggyőződni arról, hogy ha G_n minden csúcsának fokszáma pontosan 2, akkor a gráf kör.

A G_n gráf akkor és csak akkor fa, ha éleinek száma $n-1$. — Ha a G_n gráf fa, akkor $k=0$, s így $n-e=1$ -ből adódik az állítás első része. A második pedig abból, hogy ha ennél több élt tartalmazna a gráf, nem lehetne körmentes. Egy gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két pontja között csak egyetlen él van. Ha a gráf fa, akkor összefüggő és nem tartalmaz kört, tehát nem lehet két olyan pontja, amelyeket egymél több út köt össze. Fordítva, ha a G gráfnak bármely két pontja között egyetlen út van, akkor G egyrészt összefüggő, másrészt körmentes, tehát fa.

Ha a G_n gráfban van kör és megszüntetjük a kör egyik élet, akkor a kapott gráf még összefüggő marad. — Mivel a G_n gráfban van kör, van elemi kör is, s ha ennek egy élet töröljük, az élek és elemi körök száma egyaránt 1-gyel csökken, tehát a karakterisztika nem változik.

Ha az egyszerű összefüggő G gráf nem szeparábilis, akkor bármely éle hozzátartozik legalább egy körhöz. Legyen G nem szeparábilis, és az e él kösse össze a

P_1 és P_2 pontokat! Ha e élt elhagyjuk, a gráf összefüggő marad, tehát P_1 és P_2 között lesz út. Ez az út az e éllel együtt kört alkot.

Ha a G_n gráf e élt tartalmaz, akkor legalább $e-n+1$ élt kell törölnünk ahhoz, hogy megkapjuk az adott gráf valamely favázát. — Valóban: a fának pontosan $n-1$ éle van, tehát alkalmasan választott $e-(n-1)$ kör-él törlésével az előbbieket értelmében fát kapunk.

Az n szögpontú e élű egyszerű összefüggő gráf elemi köreinek száma $e-n+1$. — Az előző tétel értelmében ugyanis ennyi elemi kör-él megszüntetésével már körmentes gráfot kapunk. Ez a szám éppen a favázra vonatkozó alapkörrendszer köreinek a számát adja, ezért az adott összefüggő gráf ciklomatikus számának is nevezzük.

Ha az n pontú e élű egyszerű nem összefüggő G gráf m komponensből áll, akkor ciklomatikus száma $e-n+m$. — A G gráf ciklomatikus számán komponensei ciklomatikus számának összegét értjük; nyilván ennyi élt kell összesen törölnünk, hogy ligetet kapjunk. Ha a gráf ciklomatikus száma nulla, akkor a gráf körmentes, tehát fagráf, illetőleg liget.

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a G_n gráf valamelyik éle híd legyen, az, hogy ez az él ne tartozzék körhöz. — Ha a kérdéses él híd, akkor nem tarthat körhöz. Ellenkező esetben ezt az élt törölve továbbra is összefüggő gráfot kapnánk, tehát az él — feltevésünkkel ellentétben — nem lehetne híd. Ha viszont a szóban forgó él nem tartozik körhöz, akkor ezt megszüntetve — mivel a csúcsok és elemi körök száma ezáltal nem változik — 2 karakterisztikájú gráfot kapunk, tehát az említett él híd.

Fának van legalább két elsőfokú csúcsa. — Ha G_n gráf fa, akkor $n-1$ éle van, s

ezek között van elsőfokú is, mert ha mindegyik legalább másodfokú lenne, akkor legalább n élt tartalmazna s ezért nem lehetne fa. Hagyjuk el ezt a — feltevésünk szerint egyetlen — elsőfokú csúcsot a hozzátartozó éllel együtt: a keletkezett G_{n-1} gráf szintén fa, aminek tehát $n-2$ éle van, ez azonban ellentmond annak, hogy az összes többi csúcs legalább másodfokú.

Az egyszerű poliéder csúcsainak c , éleinek e és lapjainak l számára érvényes, hogy $l+c=e+2$.

Szemeljük ki a poliéder egy lapját és összenyomással, széthúzással, de szakítás és ragasztás nélkül vigyük át az éleket és csúcsokat a kiszemelt lap síkjára úgy, hogy csak a szóban forgó lap belsejébe kerüljenek, élek és csúcsok fedése nélkül! Az eredeti térbeli gráfot ily módon síkba rajzoltuk, amikor is csúcsnak csúcs, élnek él és lapnak — a kiválasztott lap kivételével — elemi kör felel meg. Erre a gráfra érvényes, hogy $c-e+k=1$, s ha figyelembe vesszük még az említett lapot is, k helyett $(l-1)$ -et írva éppen a bizonyítandó Euler-tételt kapjuk.

Egy nem szeparálható gráf bármely élet tekintjük is, ennek vagy az elhagyása, vagy az összehúzása nem szünteti meg a nem szeparálhatóságot.

Legyen G gráf nem szeparálható, és benne e egy él. Ha az e elhagyásával kapott G' gráf nem szeparálható, akkor készen vagyunk. Ha viszont G' szeparálható, akkor létezik egy P elvágó pontja, amely G'_1 és G'_2 gráfra bontja a G gráfot. Jelölje P_1 és P_2 az e él két végpontját. Ezek közül egyiknek a G'_1 , a másiknak a G'_2 gráfban kell lennie. Mivel G nem volt szeparálható, így sem a P_1 , sem a P_2 pont nem lehet azonos P ponttal, ha tehát e elhagyása helyett összehúztuk volna, akkor a keletkező G'' gráf nem szeparálható lett volna.

Fermat érintőmeghatározási módszeréről

Cikkünk rövid áttekintést kíván adni arról, hogyan határozta meg Fermat egy sajátos algebrai módszerrel algebrai függvények érintőit. Ezzel az ismertetésünkkel azoknak a kartársaknak szeretnénk segítséget nyújtani, akik — pl. szakköri keretek között — matematikatörténeti kérdésekkel kívánnak foglalkozni.

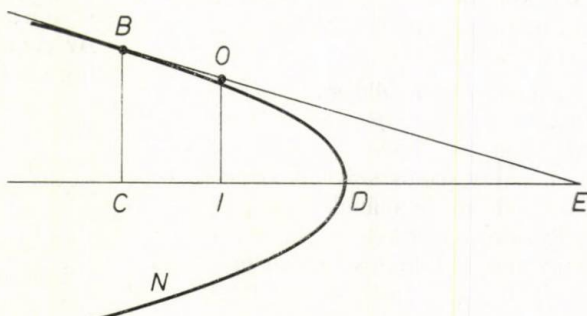
Fermat derékszögű koordináta-rendszerben adott algebrai függvények érintőit a szubtangensek kiszámításával határozta meg. (A szubtangens az érintő azon részének az x tengelyre vett merőleges vetülete, amelyet az érintési pont és az érintőnek az x tengellyel alkotott metszéspontja határol. Fermat általunk vizsgált példáiban egy koordinátatengely szerepel, s a tekintett görbe áthalad az origón.) Fermat bemutatásra kerülő számítási módszerét az 1630 körül kifejlesztett szélsőérték meghatározási eljárása alkalmazásának tekintette.

A matematikatörténészek sokáig abból az önkényes feltételezésből indultak ki, hogy létezik egy egységes, egyetlen Fermat-féle szélsőérték-módszer. 1929-ben Wieleitner kimutatta ([1]), hogy Fermat munkáiban két, egymástól élesen különböző ilyen módszer található. Az egyik egy egyenlet kettős gyökének létezésével kapcsolatos ([2]), a másik pedig, amelyen érintőmeghatározása alapul, az alábbiakban foglalható össze.

Jelölje A a keresett $f(A)$ szélsőérték helyét! Legyen E egy kis, véges szakasz. Az $f(A)$ és az $f(A+E)$ kifejezéseket „tegyük egyenlővé” (adaequari)! Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd mindkét oldalon hagyjuk el a közös tagokat, így minden tagban előfordul E ! Osszuk E -vel minden tagot, majd hagyjuk el („elidentur”) a még E -t tartalmazó tago-

kat! A kapott egyenletből A kifejezhető ([3]).

A továbbiakban bemutatjuk, hogyan alkalmazta Fermat ezt a módszerét a parabola érintőjének — illetve szubtangensének — meghatározására. (Megkísérjük idézeteinkben hűen visszaadni Fermat eredeti jelölés- és kifejezőmódját. A mai írásmódra változtattuk azonban Fermat együttható és kitevő jelölését, amely a számok helyett a nekik megfelelő latin szavakat, illetve azok rövidítéseit használta.)

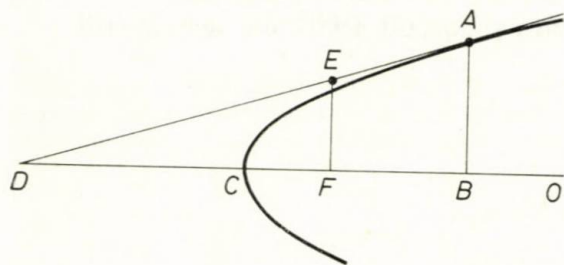


1. ábra

„Legyen adott pl. a BDN parabola, amelynek csúcsa D , tengelye a DC egyenes. A parabola adott B pontjához tartozó BE érintőt keressük, amely a parabola tengelyét az E pontban metszi. Legyen O a BE egyenes egy pontja. Tartozzék O ponthoz az OI , B ponthoz a BC ordináta. $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, mert az O pont a parabolán kívül van. Hasonlóság miatt $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, ezért $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$. De B adott, ezért ismert a BC szakasz, valamint a C pont, s így CD is. Legyen $CD = D$, $CE = A$, $CI = E$. Ezért $D : (D - E) > A^2 : (A - E)^2$, azaz $DA^2 + DE^2 - 2DAE > DA^2 - A^2E$, vagyis $DE^2 - 2DAE$ legyen egyenlő (adaequabitur) $-A^2E$ -vel. Tehát $DE^2 + A^2E$ adaequa-

bitur $2DAE$. Minden tagot osztva E -vel, $DE + A^2$ adaequabitur $2DA$. A DE tag elhagyása (elidatur) után A^2 egyenlő lesz (aequabitur) $2DA$ -val, azaz $A = 2D$, tehát a CE szakasz egyenlő a CD kétszeresével." ([4], első publikálása [5]. Az utóbbiban számolási hibákkal.)

Fermat úgy látta, hogy érintőmódszerét implicit függvények esetében is sikeresen alkalmazhatja. Ennek bemutatására ismertetjük érintőmeghatározását egy Descartes által javasolt ([6], 129., 130. oldal) — ma Descartes-level néven ismert — függvény esetében.



2. ábra

„A CA görbe tulajdonságát fejezze ki a $CB^3 + BA^3 = N \cdot CB \cdot BA$ egyenlet, ahol BA a CA görbe tetszőleges A pontjából az OC tengelyre bocsátott merőleges szakasz, N pedig egy adott szakasz. Tételezzük fel, hogy az A ponthoz tartozó érintőt, amit keresünk, már megszerkesztettük. Tegyük egyenlővé (par adaequation) a $CF^3 + FE^3$ és az $N \cdot FC \cdot FE$ kifejezéseket. Legyen $BA = B$, $CB = D$, $BD = A$ és $BF = E$. Mivel $FE : (A - E) = B : A$, ezért $FE^3 = B^3(A - E)^3 : A^3$. Ezért a $(D - E)^3 + B^3(A - E)^3 : A^3$ és az $N(D - E)(A - E)B : A$ kifejezéseket kell egyenlővé tenni. Végezzük el a kijelölt műveleteket, hagyjuk el a két oldalon szereplő, az egymással megegyező tago-

kat. Így minden megmaradt tag tartalmazza az E tényezőt, ezért osszunk E -vel. Hagyjuk el a még E -t tartalmazó tagokat, s így a $3D^2A + 3B^3 = NDB + NBA$ egyenlőséghez jutunk. Ebből $A = (NDB - 3B^3) : (3D^2 - NB)$, amit kerestünk." ([7], 156., 157. oldal.)

Fermat szerencsésen választott algoritmusával megnyitotta az utat olyan különböző — szélsőérték-, érintő- és súlypontmeghatározási — problémák egységes tárgyalásához, amelyek addig minden egyes esetben egyedi megfontolásokat igényeltek. Fermat módszere még azért is jelentős volt a matematikai analízis történetében, mert abban először szerepelt a változó kis megváltoztatásának hatékony ötlete.

Fermat érintőmeghatározási módszerének azonban több gyenge pontja is volt. Ezek így összegezhetők:

a) az „adaequalitas”, a nem pontos egyenlőség használata, amelyet Fermat Diophantosz Arithmetika című művének latin fordítótól vett át;

b) a kis szakasz E jelét tartalmazó tagok indok nélküli elhagyása, törlése („elisio”);

c) nem mindig világos, hogy Fermat miért és mire alkalmazta szélsőérték eljárást;

d) módszerével a számolás helyenként nehézkessé vált.

Fermat legnagyobb igyekezete ellenére sem tudta szélsőértékmeghatározási módszerét bebizonyítani ([8]), sem biztosabb alapokra helyezni. A Descartes-tal folytatott híres érintővitájában ([9], 168—174. oldal) is megmutatkozott hagyományos, ókori görög érintőfelfogása megakadályozta abban.

IRODALOM

- [1] WIELEITNER, H.: *Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten*. Jahresbericht, Deutsche Mathematiker—Vereinigung, 38, (1929), 24—35. oldal.
- [2] FERMAT, P.: *Methodus de maxima et minima*. Oeuvres de Fermat. P. Tannery—C. Henry, Paris, 1891—1912, 1—4. k. (a továbbiakban FO), I. k., 147—153. oldal.

- [3] FERMAT, P.: *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*. FO/I, 133—136. oldal, 133., 134. oldal=FO/III., 121., 122. oldal.
 [4] FERMAT, P.: *De tangentibus linearum curvarum*, FO/I., 134—136. oldal, FO/III., 122., 123. oldal.
 [5] FERMAT, P.: *De tangentibus linearum curvarum*. *Varia Opera Mathematica* D. Petri de Fermat, Tolosae, 1679; 63., 64. oldal.
 [6] *Descartes levele Mersenne-hez*. 1638. I. 18., FO/II., 126—132. oldal.
 [7] *Fermat levele Descartes-hoz*. 1638. júl., FO/II., 154—162. oldal.
 [8] *Fermat levele Brulart-hoz*. 1643. márc., FO — Supplement, 1922., 120—125. oldal.
 [9] VEKERDI, L.: *Descartes érintőszerkesztési módszere*. *Matematikai Lapok*, XVIII. évfolyam, 1—2. szám (1966), 165—178. oldal.

LEHEL JENŐ

tudományos munkatárs

MTA SZTAKI

Gráf- és hálózateleméleti csoport

Jelentés a Bolyai János Matematikai Társulat matematikatanárok számára rendezett 1983. évi versenyről

A kombinatorikus geometria témakörből kiválasztott nyolc feladat megoldására három nyári hónap állt a tanárok rendelkezésére. A versenyre hét dolgozat érkezett.

A Versenybizottság javaslata alapján a Bolyai János Matematikai Társulat az alábbi díjakat és jutalmakat ítéli oda.

A matematikatanárok 1983. évi versenyén

I. díjat nyert és 3000 Ft jutalomban részesül

Spissich László, Pápa, Jókai Mór Közgazdasági Szakközépiskola;

II. díjat és 2000 Ft jutalmat nyertek

Bartha Gábor, Szentendre, Móricz Zsigmond Gimnázium
és

Bogdán Zoltán, Cegléd, Kossuth Lajos Gimnázium;

III. díjat és 1000 Ft jutalmat nyertek

Náfrádi Ferenc, Győr, Jedlik Ányos Ipari Szakközépiskola,
Nyíró László, Mezőkövesd, 3. számú Általános Iskola
és

Róka Sándor, Tiszalök, Teleki Blanka Gimnázium.

A díjakat 1983. december 16-án *Császár Ákos* akadémikus, a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke és *Hajnal András* akadémikus, a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára nyújtotta át.

A versenyfeladatok megoldása

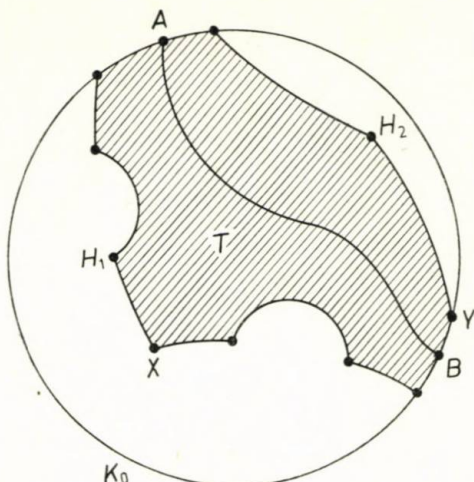
1. Adott a síkon n körvonal, ezek a síkot összefüggő tartományokra bontják. Bizonyítsuk be, hogy bármely tartomány határán legfeljebb $2n-2$ metszés- és érintéspontja lehet a köröknek!

Megoldás. A körök számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás igaz $n \leq 2$ -re, tegyük fel, hogy igaz $(n-1)$ -ig bezárólag, $n \geq 3$, és legyen T egy tetszőleges tartomány. Válasszunk ki egy olyan K_0 körvonalat, amelynek legalább

két ívdarabja esik T határára (ha ilyen K_0 nem létezik, akkor T határán legfeljebb n metszés- és érintéspont van).

Kössük össze a két ívdarab egy-egy belső pontját, A -t és B -t, egy teljesen T -ben haladó, önmagát nem metsző AB vonallal. Feltéhetjük, hogy T a K_0 határu kör belsejében helyezkedik el, ezért az AB vonal ezt a körtartományt (T -vel együtt) két részre vágja (1. ábra).

Vegyük észre, hogy T határának az AB két oldalán levő H_1 és H_2 darabjait K_0 -tól eltekintve különböző körvonalak pontjai alkotják. Könnyű ellenőrizni ugyanis, hogy tetszőleges $X \in H_1$ és $Y \in H_2$ pontokon áthaladó bármely K_0 -tól különböző körvonal metszi az AB vonalat, ilyen körvonal pedig nem létezik az n körvonal között.



1. ábra

Ha a H_1 , illetve H_2 határdarabokat adó körök $H_0, H_1^1, \dots, H_p^1$, illetve $H_0, H_1^2, \dots, H_q^2$, akkor tehát $p+q \leq n-1$ és $p, q \leq n-2$. Ezért az indukciós feltevés miatt H_1 -en legfeljebb $2p$, H_2 -n pedig legfeljebb $2q$ metszés- és érintéspont szerepelhet. A T határán tehát összesen $2p+2q \leq 2(n-1)$ ilyen pont lehetséges.

2. Legyen P egy véges pontthalmaz a síkon, $\mathcal{B}$ pedig a sík boxainak családja azzal a tulajdonsággal, hogy P bármely két pontját fedi $\mathcal{B}$ valamely boxa. Bizonyítsuk be, hogy P lefedhető $\mathcal{B}$ legfeljebb öt boxával!

Megoldás. Legyen $\text{box}(P)$ a P -t tartalmazó legszűkebb box a síkon és jelöljön $B(x, y)$ egy olyan $\mathcal{B}$ -beli boxot, amely tartalmazza az $x, y \in P$ pontokat. A $\text{box}(P)$ négy oldalára eső (nem feltétlenül különböző) x_1, x_2, x_3, x_4 pontokra nyilván teljesül:

$$P \subset \text{box}(P) \subset \bigcup_{1 \leq i < j \leq 4} B(x_i, x_j).$$

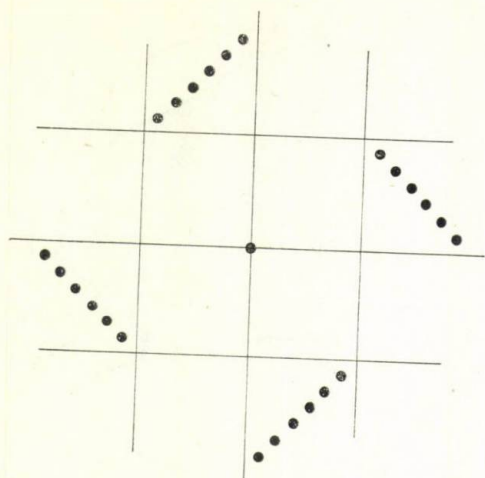
Ha az x_i pontok között van két azonos, akkor a P -t fedő hat box között legfeljebb három különböző szerepel. Ha viszont a pontok különbözőek és pl. x_1, x_3 pontok $\text{box}(P)$ szemközti oldalaira esnek, akkor a $B(x_1, x_3)$ és $B(x_2, x_4)$ boxok közül, könnyen ellenőrizhető, mindkettőre nincsen szükség.

Megjegyzések.

— Ha a P halmazról a végeesség helyett csak korlátosságot teszünk fel, a feladat állítása nem igaz (P lehet a $(0, 1)$ nyílt intervallum, $\mathcal{B}$ pedig az $\left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right]$ zárt intervallumok családja, $k=2, 3, \dots$). Igaz marad viszont az állítás, és bizonyítás teljesen hasonló a fenti megoldáshoz, ha P korlátos és zárt, továbbá abban az esetben is, ha P korlátos és $\mathcal{B}$ véges.

Náfrádi Ferenc, Győr és Róka Sándor, Tiszalök

— A 2. ábrán egy példát látunk arra, hogy szükséges lehet öt box a fedéshez. Legyen P az ábrán megadott 25 pontból álló halmaz, $\mathcal{B}$ pedig a pontpárokat tartalmazó



2. ábra

legsűkebb boxok családja. Bármely box $\mathcal{B}$ -ből P -nek legfeljebb 7 pontját tartalmazza, egy középső pontot tartalmazó box pedig legfeljebb 3 pontot. Ezért tehát 4 box nem elegendő P lefedéséhez, mivel $3 \cdot 7 + 3$ csak 24.

3. A d -dimenziós Euklideszi tér egy korlátos pontthalmazának burkán értjük a halmazt tartalmazó legsűkebb boxot! Legyen $d \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pont benne van egy véges P halmaz burkában, akkor benne van P legfeljebb d pontjának burkában is!

Megoldás. Jelöljük P burkát $\text{box}(P)$ -vel. Egy tetszőleges $x \in \text{box}(P)$ ponton átfektetett és valamely koordináta síkkal párhuzamos H hipersík vagy

metszi P -t, vagy H mindkét oldalán van pontja P -nek.

Legyen $H_1, \dots, H_d$ az x -en áthaladó, a koordinátasíkokkal párhuzamos d darab hipersík. Megadunk egy legfeljebb d elemű $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ pontthalmazt P -ben, melyre $x \in \text{box}(X)$. Ha H_1 valamelyik oldalán nincsen pontja P -nek, akkor legyen $x_1 \in H_1 \cap P$, egyébként válasszunk egy tetszőleges $x_1 \in P$ pontot. Minden további $2 \leq i \leq d$ esetén, ha H_i mindkét oldalán, vagy H_i -n, van pontja az $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ halmaznak, akkor $x_i \in P$ tetszőlegesen vehető (valójában nincs is rá szükség), egyébként válasszunk egy tetszőleges $x_i \in P$ pontot H_i -ről, illetve H_i -nek arról az oldaláról, ahol az $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ halmaznak még nincsen pontja.

Megjegyzés. A P halmaznak nyilvánvalóan van egy legfeljebb $2d$ pontú P' rész-halmaza, amelyre $\text{box}(P') = \text{box}(P)$. Így a 3. feladat állítását P' -re alkalmazva a 2. feladatnak a következő magasabb dimenziós változatához juthatunk: ha P bármely d pontját fedi egy $\mathcal{B}$ box-család valamely boxa, akkor P lefedhető $\mathcal{B}$ legfeljebb $\binom{2d}{d}$ boxával.

Bartha Gábor, Szentendre

4. Legyen $\mathcal{I}$ a $[0; 2k]$ szakasz egész végpontú zárt intervallumaiból álló család.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{I}$ intervallumai $k+1$ osztályba csoportosíthatók úgy, hogy egyetlen osztályban se legyen két keresztező!

b) Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{I}$ intervallumait k osztályba csoportosítjuk, akkor valamelyik osztályban lesz két keresztező!

Megoldás. a) Tekintsük először az intervallumok alábbi csoportjait:

$$A_i = \{[i-1, j]: j = i, i+1, \dots, i+k-1\} \quad \text{minden } 1 \leq i \leq k+1 \text{ indexre;}$$

$$B_i = \{[j, i+k-1]: j = 0, 1, \dots, i-2\} \quad \text{minden } 2 \leq i \leq k+1 \text{ indexre;}$$

$$C_i = \{[k+i, j]: j = k+i+1, \dots, 2k\} \quad \text{minden } 1 \leq i \leq k-2 \text{ indexre.}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy minden $[a, b] \in \mathcal{I}$ intervallum szerepel valamelyik csoportban. A csoportokból képezzük most az alábbi osztályokat: $\mathcal{I}_1 = A_1 \cup C_1$, $\mathcal{I}_k = A_k \cup B_k$,

$\mathcal{I}_{k+1} = A_{k+1} \cup B_{k+1}$, továbbá $\mathcal{I}_i = A_i \cup B_i \cup C_i$ minden $2 \leq i \leq k-1$ indexre. Az így megadott $k+1$ osztály egyikében sincsen két keresztező intervallum.

Spissich László, Pápa és Bogdán Zoltán, Cegléd

b) A $k+1$ darab k hosszúságú intervallum mind tartalmazza a k számot, tehát páronként keresztező. Ha ezeket k osztályba csoportosítjuk, valamelyik osztályba legalább kettő kerül, bármely $k=1, 2, \dots$ esetén.

Nyíró László, Mezőkövesd

5. Mutassuk meg, hogy ha n és k pozitív egész számokra $n+1 \leq k \leq 2n$, akkor megadható n intervallum, amely pontosan k atomot hoz létre az egyenesen!

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk n -re, az $n=1$ esetben az állítás nyilván igaz. Legyen $n+1 \leq k \leq 2n-1$ és tekintsünk $n-1$ olyan intervallumot, amely pontosan $k-1$ atomot határoz meg! Egy újabb intervallum, mely nem metszi az előbbieket unióját, eggyel növeli az atomok számát, így tehát elértük a k atomszámot n intervallummal.

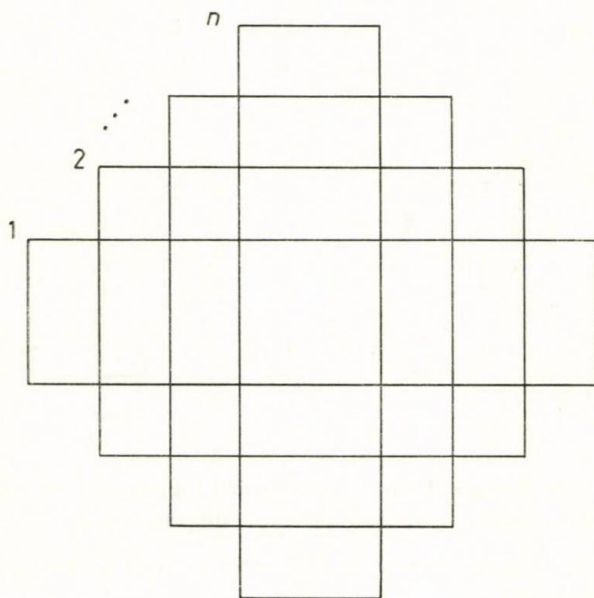
A $k=2n$ atomszám is elérhető, ha n intervallumot úgy adunk meg, hogy keresztezés gráfjuk összefüggő legyen.

Róka Sándor, Tiszalök

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha n intervallum keresztezés gráfjában az összefüggő komponensek száma c , akkor az intervallumok pontosan $2n+1-c$ atomot határoznak meg az egyenesen. Minthogy $1 \leq c \leq n$, feladatunk állítása egyenesen következik ebből az eredményből is.

6. Határozzuk meg, hogy a sík n boxa maximálisan hány tartományra bontja a síkot!

Megoldás (vázlat). Ügyelve arra, hogy a tartományok száma ne csökkenjen, egy boxcsalád tagjainak csekély módosításával elérhető, hogy a boxoknak ne legyen közös oldalvonala. Ez esetben bármely két box határának legfeljebb négy közös pontja lehet, így teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy legfeljebb $2n^2-2n+2$ tartomány keletkezhet. A 3. ábrán mutatott konstrukció pontosan ennyi tartományt hoz létre.



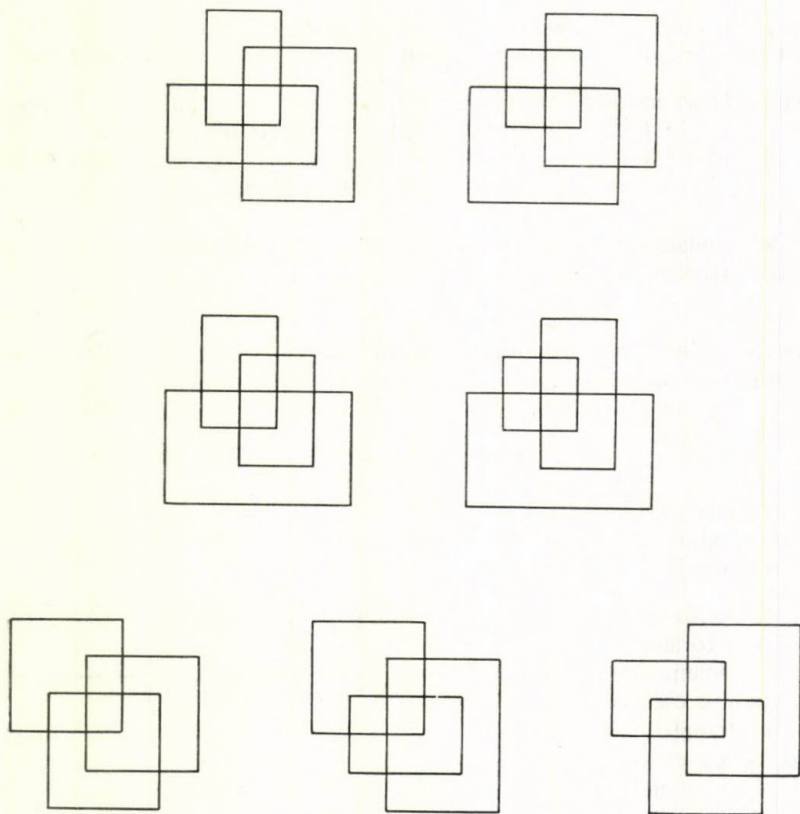
3. ábra

7. Adjuk meg a sík három boxával lerajzolható összes lényegesen különböző Venn-diagramot! (A megoldóra bízunk, hogy mit ért lényegesen különbözőn.)

Megoldás. Szorítkozzunk az olyan Venn-diagramokra, amelyekben a három box

tizenkét oldalegyenese különböző, és számozzuk a függőleges, illetve vízszintes oldalegyeneseket balról-jobbra, illetve alulról-fölfelé 0-tól 5-ig!

Kézzelfoghatóbbá válik a diagramok közötti azonosság és különbözőség, ha minden diagramot egy-egy 5×5 -ös rácsnégyzetben szerkesztünk meg úgy, hogy az oldalegyenesek a számuknak megfelelő távolságban legyenek a négyzet bal alsó sarkától. Két ilyen diagramot akkor tekintünk azonosnak, ha egybevágóak. Az így különbözőnek számító három boxból álló összes Venn-diagram a 4. ábrán látható.



4. ábra

Megjegyzés. Hasonló elv alapján tekinthetők át azok a Venn-diagramok, amelyekben azonos oldalegyeneseket is megengedünk.

8. A d -dimenziós Euklideszi tér n boxát nevezzük box-diagramnak, ha 2^n atomot hoz létre!

- Mutassuk meg, hogy egy box-diagram legfeljebb $2d$ boxból állhat!
- Adjunk meg $2d$ boxból álló box-diagramot!

Megoldás. a) Feltehető, hogy a $\{B_1, \dots, B_n\}$ box-diagram olyan, hogy az egyes boxok lapjai különböző hipersíkra esnek, továbbá az O origó közös belső pontja a boxok metszetének.

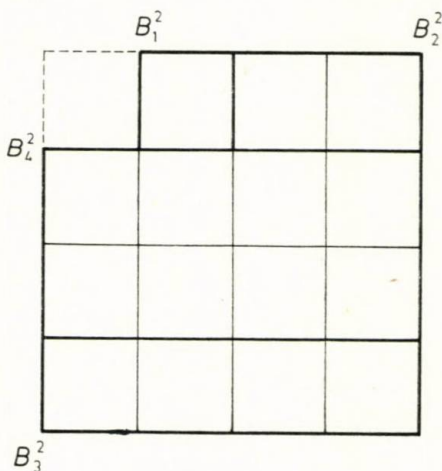
Az O -hoz legközelebbi $2d$ laphipersík legfeljebb $2d$ különböző boxhoz tartozhat. Ezért, ha $n > 2d$ lenne, akkor valamelyik box, pl. B_n , tartalmazná a $\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i$ halmazt. Ez azonban azt jelentené, hogy $\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap \bar{B}_n = \emptyset$ ($\bar{B}_n = B_n$ külseje), azaz nem létezik az összes atom, ami ellentmondás. Tehát $n \leq 2d$.

Spissich László, Pápa

b) A dimenziót növelve, lépésről-lépésre építünk fel $2d$ boxból álló $\mathcal{B}^d$ box-diagramokat ($d=1, 2, \dots$). Legyen $\mathcal{B}^1$ két boxa $B_1^1 = [1, 3]$ és $B_2^1 = [2, 4]$. Emeljünk $\mathcal{B}^1$ mindkét intervallumára egy 4 egység magasságú boxot, legyenek ezek B_1^2 és B_2^2 , tekintsük továbbá a $[0, 4]$ alapra emelt 2 egység magasságú $B_3^2 = [0, 4] \times [0, 2]$ boxot és ennek egységgel való eltolját a $B_4^2 = [0, 4] \times [1, 3]$ boxot. Minthogy $\mathcal{B}^1$ atomszáma 4, ezért B_1^2 és B_2^2 is 4 atomot határoz meg a síkon. Ez a szám B_3^2 , majd B_4^2 felvételével ismételtelen megkétszereződik, vagyis $\mathcal{B}^2 = \{B_1^2, B_2^2, B_3^2, B_4^2\}$ atomszáma 16 (5. ábra).

Ha már $\mathcal{B}^d$ elkészült, akkor $\mathcal{B}^{d+1}$ -et a következő módon adjuk meg: $B_i^{d+1} = B_i^d \times [0, 4]$ minden $1 \leq i \leq 2d$ indexre; és ha Q^d jelöli azt a O csúcsú, 4 egység élhosszúságú d -dimenziós kockát, melynek élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, akkor $B_{2d+1}^{d+1} = Q^d \times [0, 2]$ és $B_{2d+2}^{d+1} = Q^d \times [1, 3]$. Nyilván $B_1^{d+1}, \dots, B_{2d}^{d+1}$ ugyanannyi atomot határoz meg, mint $\mathcal{B}^d$, azaz 2^{2d} darabot, a két utolsó box felvételével pedig megkétszereződik ez a szám. Így $\mathcal{B}^{d+1} = \{B_1^{d+1}, \dots, B_{2d+2}^{d+1}\}$ box-diagram, mert atomszáma $4 \cdot 2^{2d} = 2^{2d+2}$.

Bartha Gábor, Szentendre



5. ábra

Felhívjuk Olvasóink figyelmét arra, hogy a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére a Művelt Nép Könyvterjesztő Vállalat Miskolcon megnyitotta a matematikai szakkönyvekkel foglalkozó FEJÉR LIPÓT könyvesboltot, amelyben a még teljesen el nem fogyott, régebbi kiadású könyvek is megtalálhatók. A bolt címe: Fejér Lipót Könyvesbolt, Miskolc, Egyetemváros, 3515.

Új könyvek

Az alábbi felsorolás az 1983-ban október 1-ig megjelent matematikai tárgyú könyveket tartalmazza.

A felsorolásban nem szerepelnek általános iskolai, középiskolai tankönyvek, egyetemi és főiskolai jegyzetek és egyes intézményeknél saját kiadásban sokszorosított kiadványok.

- ALCOCK DONALD: *Ismerd meg a BASIC nyelvet!* (2. javított kiadás.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 167 oldal, 60,— Ft.
- BEDŐ LÁSZLÓ: *Kiegészítő módszertani útmutató a matematikai munkalapokhoz.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 90 oldal, 11,— Ft.
- BÍRÓ SÁNDORNÉ—SZABADOS TAMÁS: *Vektoranalízis.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 216 oldal, 33,— Ft.
- BODÓ LÁSZLÓ (szerk.): *Matematikai, fizikai, kémiai feladatok az iskolai honvédelmi neveléshez.* Zrínyi Könyvkiadó, Budapest, 1983, 220 oldal, 33,— Ft.
- CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához* (3. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 424 oldal, 45,— Ft.
- CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 392 oldal, 51,— Ft.
- CSÁKÁNY, B., FRIED, E. and SCHMIDT, E. T. (editors): *Universal algebra.* Colloquia mathematica Societatis János Bolyai, Tom. 29., Budapest—Amsterdam—London, 1983, Bolyai János Matematikai Társulat—North-Holland Publ. Co., 804 oldal, 710,— Ft.
- CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis* I. kötet (egyetemi tankönyv). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 519 oldal, 56,— Ft.
- DARÓCZY ERZSÉBET (szerk.): *Játékos matematika, matematikai játékok az óvodában* (utánn nyomás). Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1983, 101 oldal, 30,— Ft.
- DAVIES BRIAN: *Integráltranszformációk és alkalmazásaik.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 292 oldal, 53,— Ft.
- DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítás* (2. javított kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 284 oldal, 32,— Ft.
- ERDŐS P. (editor): *Studies in Pure Mathematics. To the Memory of Paul Turán.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983, 773 oldal, 670,— Ft.
- EUKLIDÉSZ: *Elemek.* (Fordította és jegyzetekkel ellátta Mayer Gyula.) Gondolat, Budapest, 1983, 530 oldal, 75,— Ft.
- FENYŐ, S.—STOLLE, H. V.: *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen*, 2. Band. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983, 376 oldal.
- FRIED ERVIN: *Abstrakte Algebra. Eine elementare Einführung.* Verlag Thun und Akadémiai Kiadó, Frankfurt/Main—Budapest, 1983, 340 oldal, 298,— Ft.
- GÁLL ÉVA: *Matematikaország határán* (4. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 63 oldal, 20,— Ft.
- GIMES GYÖRGYNÉ (szerk.): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* (Hibajegyzékkel kiegészített 4. kiadás.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 384 + 10 oldal, 33,— Ft.
- GLADKIH IRINA—ZIMÁNYI MAGDOLNA: *FORMAC programozási nyelv matematikai kifejezések szimbolikus kezelésére.* Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest, 1983, 82 oldal, ár nélkül.
- GOTTLÖB, MAX-PETER: *Elektrotechnikai és elektronikai számítások komplex számokkal.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 194 oldal, 44,— Ft.
- GULYÁS OTTÓ: *Matematikai statisztika meteorológusok számára.* Országos Meteorológiai Szolgálat, Budapest, 1983, 233 oldal.
- HÁMORI MIKLÓS: *Halmazok, matematikai logika az általános és középiskolai tanulók számára* (5. kiadás). Általános iskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 159 oldal, 10,— Ft.
- IGNATYEV, J. I.: *A találékonyág birodalmában.* Általános iskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 219 oldal, 16,— Ft.
- JÁNOSSY LAJOS—GNÄDIG PÉTER—TASNÁDI PÉTER: *Vektorok integrálása.* (Vektorszámítás 3. kötet.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 398 oldal, 45,— Ft.
- KAUFMAN, ROGER EMANUEL: *FORTRAN képeskönyv.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 285 oldal, 75,— Ft.
- KÓLYA DÁNIEL: *Gyakorlati ábrázoló geometria* (2. javított kiadás). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 371 oldal, 67,— Ft.
- KÓLYA DÁNIEL: *Ábrázoló geometriai példatár* (2. kiadás, utánn nyomás). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 305 oldal, 64,— Ft.

- KOROVKIN, P. P.: *Egyenlőtlenségek*. Középiskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 81 oldal, 7,— Ft.
- LATKA FRANTISEK: *Matematikai képletgyűjtemény* (3. kiadás). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 134 oldal, 15,— Ft.
- MÁRKUSZ ZSUZSANNA: *Modellelméleti és univerzális algebrai eszközök a természetes és formális nyelvek szemantikaelméletében*. SZTAKI, Budapest, 1983, 70 oldal, ár nélkül.
- MENCZEL JENŐ (szerk.): *Statistikai módszerek alkalmazása a mezőgazdaságban*. Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest, 1983, 495 oldal, 114,— Ft.
- MOLNÁR EMIL: *Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye, 1947—1970* (3. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 580 oldal, 72,— Ft.
- PÁLFAI PÁL (szerk.): *Felvételi feladatok. Matematika, szabadkézi rajz* (4. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 281 oldal, 51,— Ft.
- RÉDLING ELEMÉR: *Hasonlósági transzformációk*. (A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában 4.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 187 oldal, 22,— Ft.
- RÉNYI ALFRÉD: *Tagebuch über die Informationstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften—Birkhäuser Verlag—Akadémiai Kiadó, Berlin—Basel—Budapest, 1982, 173 oldal, ár nélkül.
- ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika*. Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga (8. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 128 oldal, 12,— Ft.
- SCHARNITZKY VIKTOR: *Differenciálegyenletek. Példatár* (3. kiadás). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 337 oldal, 39,— Ft.
- SOÓS PAULA—CZAPÁRY ENDRE: *Geometriai feladatok gyűjteménye* 2. kötet (12. kiadás). Tankönyvkiadó, Budapest, 1983, 348 oldal, 18,— Ft.
- SZABADKAI ATTILA—SZIDAROVSZKY FERENC: *Döntés-előkészítési módszerek alkalmazása*. Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest, 1983, 155 oldal, 45,— Ft.
- SZÉNÁSSY BARNA: *König Gyula. A múlt magyar tudósai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983, 176 oldal, ár nélkül.
- SZÉP, J.—FORGÓ, F.: *Einführung in die Spieltheorie*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983, 292 oldal, 260,— Ft.
- URBÁN JÁNOS: *Matematikai logika. Példatár*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 273 oldal, 39,— Ft.
- VOTISKY ZSUZSA: *Mese helyett: Matematikai kifestő óvodásoknak*. Móra Könyvkiadó, Budapest, 1983, 53 oldal, 47,— Ft.
- WEHRMANN, WOLFGANG (szerk.): *Korrelációs technika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983, 168 oldal, 32,— Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

F E L A D A T O K

Rovatvezető: Pogács Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldását is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: az 1059—1064. feladatokra a lap kézbesítésétől számított egy hónap, a további feladatokra három hónap.

1059. Az $ABCD$ négyszög AB , illetve CD oldalainak felezőpontja rendre P , illetve Q , az AC , illetve BD átlójának felezőpontja pedig rendre R , illetve S . Bizonyítsuk be, ha $PQ \perp RS$, akkor $AD = BC$.

1060. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós gyökeit:

$$a^{2x}c^z + b^y = 2a^xc^z,$$

$$b^{2y}a^x + c^z = 2b^ya^x,$$

$$c^{2z}b^y + a^x = 2c^zb^y,$$

ahol a, b, c egytől különböző pozitív számok!

Varga István, Nagyszalonta

1061. Az ABC nem szimmetrikus háromszög BC oldalának felezőpontja F . Egyenes vágásokkal daraboljuk fel az AFB háromszöget úgy, hogy valamennyi darabjából az AFC háromszöggel egybevágó háromszöget rakhassunk ki! Határozzuk meg e darabok számának a minimumát!

1062. Oldjuk meg a

$$2^{3x+2} + a^2 3^{3x} = 2^x 3^{2x+1}$$

egyenletet, ahol a adott valós szám!

Tuzson Zoltán, Marostvásárhely

1063. Legyenek p és q ($p < q$) ikerprímek! Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{q-1}}{p!(q+1)} \cdot \prod_{k=1}^q (2k-1)$$

természetes szám!

Bíró Béla, Barót

1064. Határozzuk meg az alábbi sor határértékét:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{6^k}$$

Székely Jenő, Budapest

1065. Legyen

$$a = 4^p + 5^p + 7^p + 1 \quad \text{és} \quad b = 4^p + 5^p + 7^p - 1,$$

ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy a és b nem lehetnek ikerprímek!

Horváth Tibor, Dunakeszi

1066. Jelölje az a, b, c oldalú háromszög területét $t(a, b, c)$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{t(a, b, c)} + \sqrt{t(p, r, s)} \leq \sqrt{t(a+p, b+r, c+s)}.$$

1067. Egy szabályos nyolcszöget véges sok paralelogrammára darabolunk. Mutassuk meg, hogy e darabok között van legalább két téglalap!

1068. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a pozitív egészek halmazán:

$$e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 = t_1^3,$$

$$e_3 x^2 + e_1 y^2 + e_2 z^2 = 1,$$

$$e_2 x^2 + e_3 y^2 + e_1 z^2 = t_2^3,$$

ahol $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, t_1 és t_2 pedig $3n+1$ alakú pozitív egészek.

Bege Antal, Csíkszereda

1069. Határozzuk meg azokat a folytonos

$$f: (0, \infty) \mapsto \mathbf{R}$$

függvényeket, amelyek tetszőleges $x > 0$ esetén kielégítik az

$$f(x^2) + f(x) = x^4 - x + 15 \ln x$$

összefüggést!

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

1070. Az első p darab pozitív egész reciprokának összegéből vonjuk ki a következő r darab pozitív egész reciprokának összegét, e különbséghez adjuk hozzá a további p darab pozitív egész reciprokának összegét, s az így adódó számból vonjuk ki a következő r darab pozitív egész reciprokának összegét, és így tovább. Milyen p és r egészek esetén lesz konvergens az előbbi sor?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Feladatmegoldások (1035—1046.)

1035. Két játékos játszik. Az első mond egy egész számot, amely egynél nagyobb és tíznél kisebb. A második játékos ezt a számot szorozza egy, az előbbi feltételnek megfelelő számmal. Ezt a szorzatot most az első szorozza egy, a megadott számközből való számmal, és így tovább. A játékot az nyeri, aki szorzatával először lépi túl az 1000-et. Melyik játékos nyer?

Megoldás: A játékot az nyeri, aki a [112, 999] számközből kap számot, mert e számokat a 2, 3, ..., 9 valamelyike „túlszorozza” az ezren (a 9 például mindegyiket). Ehhez a halmazhoz a vesztes az [56, 111] számközből juttatja ellenfelét, mert $112:2=56$ és $999:9=111$.

A nyerő az előbbi halmazba a [7, 55] intervallumból kergeti ellenfelét, hiszen a végleteket tekintve $7 \cdot 9=63$ és $55 \cdot 2=110$.

Ha tehát az ellenfélnek a [4, 6] számközből adunk számot, akkor ő az előbbi intervallumba juttat, mert $2 \cdot 4=8$ és $9 \cdot 6=54$.

Összegezve: jó taktikával mindig a kezdő nyer. Kiindulásként a 4, 5, 6 számok valamelyikét kell mondani. Az ellenfél e mondott számot a [8, 54] számközbé „szorozza”, amit a kezdő alkalmas szorzóval az [56, 111] halmazba „vezet”. A vesztes e halmazból való számot csakis a [112, 999]-ből való számmá teheti, amit a nyertes túljuttat az ezren.

Moyzes Károly, Szeged

A megoldók száma: 23.

1036. Igaz-e, hogy ha egy p oldalú (p prim) konvex sokszögnek van két szimmetriatengelye, akkor a sokszög szabályos?

Ugray Zsolt, Budapest

Megoldás: Legyen a két szimmetriatengely t_0 és t_1 , közös pontjuk O . (A tengelyek nem lehetnek párhuzamosak, hiszen az ilyenekre vonatkozó tükrözésszorzat egyrészt eltolás, másrészt a sokszöget önmagába viszi.) A $p \geq 3$ és prim voltából következik, hogy a t_0 és a t_1 tengelyek egy és csakis egy csúcsra A_0 és A_1 -re illeszkednek, s ugyanakkor egy-egy oldal felezőmerőlegesei is.

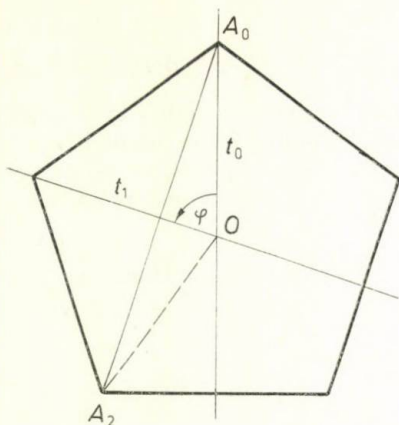
Legyen az $A_0OA_1 \angle = \varphi$. Ekkor a sokszöget t_0 , majd t_1 tengelyre tükrözve, a sokszög önmagába megy át. E tükrözésszorzat az O középi 2φ szögű elforgatás. E forgatást akárhányszor ismételve, azaz a sokszöget rendre t_0 , majd t_1 tengelyre tükrözve, a sokszög mindig önmagába megy át.

Tegyük fel, hogy egy ilyen O körüli 2φ szöggel való elforgatás egy csúcsot a töle k -adik csúcsba viszi át, A_0 pontot az A_k pontba. Ez azt jelenti, hogy a sokszög $k-1$ csúcsa az A_0OA_k háromszög külsejében van — a sokszög konvex volta miatt —, de úgy, hogy az A_0OA_k szögtartomány belsejéhez tartozik (1. ábra., $k=2$, $p=5$). Az A_k csúcsot O körül rendre 2φ szöggel elforgatva, a kapott csúcsokat A_{2k} , A_{3k} , ...-val jelölve e csúcsok az A_0 , A_k csúccsal együtt egy O körüli A_0O sugarú körön vannak. Mivel p prim, ezért valódi osztói nincsenek, tehát az O körüli 2φ szög egész számú többszörösével való elforgatások során, pontosan p számú elforgatás visz az A_0 csúcsba, azaz $A_0 \equiv A_{pk}$. Minthogy a sokszöget önmagába vivő forgatások szimmetriatengelyt ugyanilyenbe visznek, ezért a sokszögnek p darab szimmetriatengelye van, s ezek mindegyike O -ra illeszkedik. Ebből viszont azonnal adódik, hogy a p szög oldalai és szögei egyenlők, tehát a sokszög szabályos.

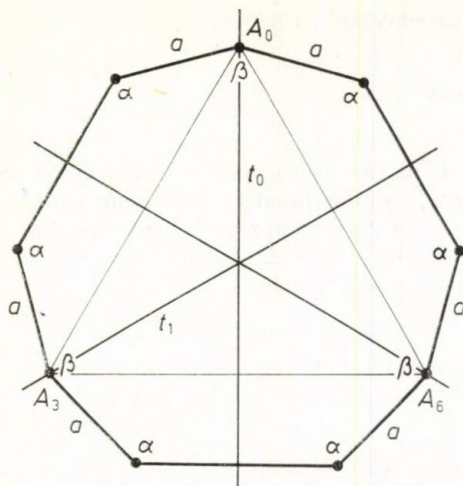
A 2. ábra ($\alpha=135^\circ$, $\beta=150^\circ$) *ellenpéldát* ad arra az állításra, hogy ha a p páratlan és a p szögnek van két szimmetriatengelye, akkor a sokszög szabályos.

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 8.



1. ábra

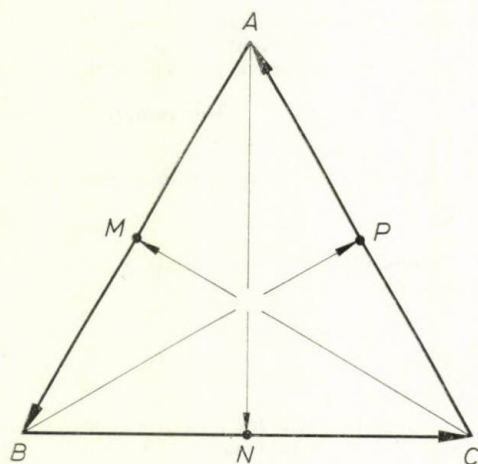


2. ábra

1037. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az M, N, P pontokban érinti. Igazoljuk, hogy a háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha

$$\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}.$$

Megoldás: Legyen a háromszög szabályos. Ekkor a 3. ábra szerinti jelölésekkel



3. ábra

és

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

$$\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC},$$

$$\vec{BP} = \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{CA},$$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{AB},$$

azaz

$$\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \frac{3}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0},$$

tehát a feltétel szükséges.

Ha most valamely háromszögre az

$$\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0},$$

akkor előbbi jelöléseinkkel legyen

$$\vec{BN} = \alpha \cdot \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \beta \cdot \vec{CA}, \quad \vec{AM} = \gamma \cdot \vec{AB},$$

ahol

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1.$$

Mivel

$$\vec{AN} = \vec{AB} + \alpha \cdot \vec{BC},$$

$$\vec{BP} = \vec{BC} + \beta \cdot \vec{CA},$$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \gamma \cdot \vec{AB},$$

ezért feltételünkéből

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + \alpha \cdot \vec{BC} + \beta \cdot \vec{CA} + \gamma \cdot \vec{AB} = \\ &= \alpha \cdot \vec{BC} + \beta \cdot \vec{CA} + \gamma \cdot (-\vec{BC} - \vec{CA}) = (\alpha - \gamma) \cdot \vec{BC} + (\beta - \gamma) \cdot \vec{CA}. \end{aligned}$$

De $\vec{BC} \nparallel \vec{CA}$, ezért $\alpha - \gamma = \beta - \gamma = 0$ lehet csak, azaz $\alpha = \beta = \gamma$. Az M, N, P érintési pontok a megfelelő csúcsoktól egyenlő távol vannak, ezért

$$\gamma = 1 - \beta, \quad \alpha = 1 - \gamma, \quad \beta = 1 - \alpha,$$

tehát

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

az ABC háromszög szabályos, azaz a feltétel elégséges is.

Nyirő László, Mezőkövesd és
Szász Róbert, Marosvásárhely

A megoldók száma: 15.

1038. Melyek azok az x, y, z, t pozitív egész számok, amelyekre

$$3^x + 3^y + 3^z + 3^t$$

köbszám?

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Bármely N pozitív egész számot könnyen felírhatunk néhány (nem feltétlenül különböző kitevőjű) hármas alapú hatvány összegeként. Ehhez csupán azt kell tennünk, hogy előállítsuk az N hármas-alapú számrendszerbeli alakját:

$$N = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 3^i,$$

ahol nyilván

$$a_i \in \{0, 1, 2\} \quad \text{és} \quad n = \left\lceil \frac{\ln N}{\ln 3} \right\rceil.$$

Ha előfordul az $a_i = 2$ érték, akkor mindenütt $2 \cdot 3^i$ helyett $3^i + 3^i$ összeget írunk. Mivel egy adott, 1-nél nagyobb, egész alapú számrendszerben az egész számok felírása egyértelmű, beláttuk, hogy minden N pozitív egész egyértelműen felírható (a sorrendtől eltekintve) hármas alapú hatványok összegeként, ha a kitevők között nincs 3 egyenlő. (Ha megengednénk 3 egyenlőt, akkor pl. $27 = 3^3 = 3^2 + 3^2 + 3^2$ kétféle módon is előállítható lenne sőt még $3^2 + 3^2 + 3 + 3 + 3$ alakot is használhatnánk.)

Feladatunkban N köbszám és az előállításához használható pozitív egész kitevőjű 3 hatványok száma pontosan 4. Belátjuk, hogy egy köbszám ilyen felbontásában nem fordulhat elő az, hogy a kitevők között 3 egyenlő legyen. (Ennek és előző megállapításainknak összevetése a megoldásunkhoz vezető út kulcsa.)

Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy az $N = n^3$ köbszámot 4 db hármasalapú hatvány összegére bontva ezek között 3 egyenlő kitevőjű fordul elő:

$$N = n^3 = 3^a + 3^a + 3^a + 3^b = 3^{a+1} + 3^b,$$

Jelölje c az $a+1$ és b közül a nem nagyobbat és emeljük ki a 3^c tényezőt

$$n^3 = 3^c \cdot (3^{a+1-b} + 1).$$

Itt a zárójelben páros szám áll, az első tényező viszont páratlan. Szorzatunk csak akkor lehet köbszám, ha a páros tényező 8-cal osztható (persze ez korántsem elégséges). Igazoljuk, hogy $3^{a+1-b} + 1$ nyolcas maradéka 2 vagy 4, a kitevő párosságától függően. Két esetet vizsgálunk: a kitevő $2m$ vagy $2m+1$ alakú.

1. $3^{2m} + 1 = 9^m + 1 = (8+1)^m + 1$. Az utóbbi összeget a binomiális tétel szerint kifejtve, láthatjuk, hogy a nyolccal való osztás maradéka 2.

2. $3^{2m+1} + 1 = 3 \cdot 9^m + 1 = 3 \cdot (8+1)^m + 1$ kifejtése pedig azt eredményezi, hogy itt az osztási maradék 4.

Ellentmondásra jutottunk azzal a feltevéssel, hogy az N köbszámot lehet 4 olyan 3-as alapú hatvány összegére bontani, ahol a kitevők között van 3 egyenlő.

Most már tudjuk, hogy ha

$$n^3 = 3^a + 3^b + 3^c + 3^d$$

és

$$n^3 = 3^x + 3^y + 3^z + 3^t$$

egyszerre teljesül, akkor az x, y, z, t pozitív egészek valamelyik permutációja megegyezik az (a, b, c, d) rendezett számnégyessel, hiszen nem lehet közöttük 3, amelyik egyenlő.

Mivel n^3 felbontásában 4 darab pozitív egész kitevőjű 3 hatvány szerepel, n^3 osztható 2-vel is, 3-mal is és lévén $(2; 3) = 1$, *hatal* is. A harmadik hatvány csak akkor lehet 6 többszöröse, ha az alap is az.

Legyen most már u és v nem feltétlenül különböző pozitív egész. Defináljuk a k pozitív egész számot 3^{u-1} és 3^{v-1} számtani közepével:

$$k = \frac{3^{u-1} + 3^{v-1}}{2}.$$

Ennek hatszorosát köbre emelve a kívánt felbontású köbszámhoz jutunk, ugyanis

$$(6k)^3 = (3^u + 3^v)^3 = 3^{3u} + 3^{2u+v+1} + 3^{u+2v+1} + 3^{3v}.$$

Az elmondottak szerint, tehát a keresett x, y, z, t pozitív egészekből álló számnégyesek halmaza megegyezik a $3u, 2u+v+1, u+2v+1, 3v$ számnégyesek permutációinak halmazával, ha u és v végigfut a pozitív egészek halmazán.

A szimmetria miatt elegendő pl. az $u \geq v$ választásra szorítkozni.

Sugár György, Budapest

A megoldók száma: 13.

1039. Egy körvonalat felosztottunk $3k$ ponttal $3k$ részre úgy, hogy k darab ív hossza 1 egység, k darab ívé 2 egység, a többi ív hossza pedig 3 egység. Bizonyítsuk be, hogy bármely felosztás esetén van a $3k$ pont között két átellenes!

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan felosztás, amelynél a $3k$ pont között nincs két átellenes.

A körvonal összesen $6k$ darab egységnyi ívből áll, ezért $6k$ darab pont osztja fel ennyi, egységnyi ívre. Ebből $3k$ darab a megadott, p -vel jelölhető pontok száma, míg $3k$ darab a jelöletlen, n -nel jelölhető pontok száma is.

Az eredeti felosztás leghosszabb (p jelű pontot nem tartalmazó) íve 3 egységnyi, ezért az n jelű pontokból kettőnél több nem lehet közvetlenül szomszédos, tehát vagy magányosan, vagy párosával vannak. Így a $3k$ darab n típusú pontból k darab magányos és $2k$ darab párban áll.

Kettőnél több p -típusú pont sem állhat közvetlenül egymás mellett, mert ezek átellenesei — indirekt feltevésünk miatt — n -típusúak, így ezekre is igazak az n -típusú pontok elhelyezkedésére mondottak.

A feltevésünk szerint tehát p -típusú pontnak n -típusú az átellenese (és viszont), következésképpen n -típusú pároknak p -típusú párok felelnek meg átellenesen. Egyesítsük egyetlen (ugyanolyan típusú) ponttá az ilyen párokat. Ekkor $2k$ darab pont lesz mindkét típusból, s ezek mind magányosak. Ha tehát a körvonalat egy irányban haladva befutjuk, akkor e $4k$ darab pont közül minden második pont azonos típusú. Így azonban egy n -típusú pont átellenese p -típusú lévén, ez utóbbi szomszédja is p -típusú kell legyen, hiszen a két átellenes pont adta félkörök mindegyikének a belsejében ugyanannyi, mégpedig $2k-1$ darab pont van, és ezek közül az első és utolsó az előbbieket miatt azonos típusú. Ellentmondásra jutottunk, ezért feltevésünk ellenkezője igaz.

Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr

A megoldók száma: 3.

1040. Tekintsük a valós számtest feletti, a

$$2f^2(xy) \leq f(x)f(y^3) + f(x^3)f(y)$$

függvényegyenlőtlenséget kielégítő, konstanstól különböző polinomfüggvényeket! Bizonyítsuk be, hogy ha $f(1983) > 0$, akkor

$$f(x) \geq 0.$$

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Azt fogjuk igazolni, hogy az $f(x)=0$ egyenletnek vagy nincs megoldása, vagy csak az $x=0$ helyen van gyöke, s mindkét esetben $f(x) \geq 0$.

1. Tegyük fel először, hogy az $f(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke, tehát az $x \mapsto f(x)$ polinomfügg-

vénynek, mely folytonos is, nincs zérushelye és ezért mindenütt pozitív vagy negatív. Mivel $f(1983) > 0$, ezért $f(x) > 0$ minden valós x -re.

2. Tegyük most fel, hogy egyenletünknek csak az $x=0$ helyen van gyöke. Ha van olyan $x=a$ ($a \neq 0$) hely, amelyre $f(a) < 0$, akkor a folytonosság és az $x=0$ egyetlen gyök miatt $f(a^3) < 0$ is teljesül. Ugyanezen okok miatt $f(1983) > 0$ révén $f(1) > 0$, tehát

$$0 < 2f^2(a) \leq (f(a) + f(a^3)) \cdot f(1) < 0,$$

ami ellentmondás. Nincs tehát olyan a hely, amelyre $f(a) < 0$ lenne, így $f(x) \geq 0$, minden x -re.

3. Mivel $f(x)$ nem konstans, ezért van olyan $x=b$ érték, amelyre $f(b) \neq 0$. Megmutatjuk, hogy akkor $f(1) \neq 0$ is áll. Ellenkező esetben ugyanis

$$0 < 2f^2(b) \leq (f(b) + f(b^3)) \cdot f(1) = 0$$

lenne, ami lehetetlen.

Tegyük fel, hogy a $c \neq 0$ és $c \neq 1$ feltétel mellett $f(c) = 0$. Ekkor $x=y=c$ választásra

$$0 \leq 2f^2(c^2) \leq 2f(c)f(c^3) = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha $f(c^2) = 0$. Ebből viszont az következik, hogy minden k természetes egészre $f(c^{2^k}) = 0$ is teljesül, azaz polinomunknak végtelen sok gyöke van. Ez ellentmondás, így állításunkat igazoltuk.

Hajna János, Pécs

A megoldók száma: 6.

1041. Hányféleképpen lehet 2 fekete, 3 fehér és 4 piros golyót egy sorban úgy elhelyezni, hogy fekete golyó ne kerüljön fehér mellé?

Megoldás: Először helyezzük el a 2 fekete és a 4 piros golyót minden lehetséges sorrendben. Az így kapott hat elemű csoportok száma

$$P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

E csoportok között 5 olyan van, amelyben a 2 fekete golyó szomszédos, hiszen ilyeneket egynek véve:

$$P_5^{(4)} = \frac{5!}{4!} = 5.$$

A másik tíz csoportban nincs két fekete egymás mellett.

Vizsgáljuk először az előbbi 5 csoportot. A hiányzó 3 fehér golyót e csoportok elé, mögé, vagy a csoportban levők közé helyezhetjük. Ez 7 szabad helyet jelent, azonban ezek közül 3 (a fekete pár között, előtt és mögött) nem jöhet számításba. A fehér golyók bármelyikét tehát minden csoportban 4 helyre rakhatjuk. E helyeket jelző a, b, c, d elemeknek minden harmadosztályú ismétlés kombinációja (hiszen egy helyre két, illetve három golyó is tehető) a 3 fehér golyó részére egy-egy elhelyezést ad és viszont, a 3 fehér bármely — feltételünknek megfelelő — elhelyezése, az a, b, c, d elemeknek egy-egy harmadosztályú ismétléses kombinációját adja. Tehát a fehér golyók összes elhelyezkedésének a száma, minden egyes csoportban $C_4^{3,3}$, vagyis az 5 csoportban

$$5 \cdot C_4^{3,3} = 5 \left(\frac{4+3-1}{3} \right) = 100.$$

A másik, 10 darab 6 elemű (feketék nincsenek egymás mellett) csoportban a 7 szabad hely közül most 4 nem jön számításba. Marad tehát 3 hely, s mert 10 csoport van, az előbbi számításunk mintájára összesen

$$10 \cdot C_3^{3,3} = 10 \left(\frac{3+3-1}{3} \right) = 100$$

lehetőség van.

Ezek szerint $100 + 100 = 200$ elhelyezés lehetséges a feltételeknek megfelelően.

Kovács Gábor, Komárom

A megoldók száma: 16.

1042. Bizonyítsuk be, hogy a

$$2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$$

egyenletű hiperbola pontosan két rácponton halad át!

Kondor László, Dunaiújváros

pontot választjuk C csúcsnak, akkor a B csúcs C -vel egybeesik — csak elfajult háromszögről beszélhetünk; ha pedig az A' pontot akarjuk C -nek választani, nem is alakul ki háromszög — ebben a „határhelyzetben” az $A'C$ egyenes a -val párhuzamos, a B csúcspont a végtelenbe kerül.

II. Legyen a derékszögű csúcs B !

Szerkesszük meg ismét az A pont tükörképét: A' , valamint rajzoljuk meg az AA' átmérőjű Thaleszkört, amely messe az a egyenest B_1 , illetve B_2 pontokban. A C pontok halmaza a B_1 , illetve a B_2 kezdőpontú B_1A' , illetve B_2A' nyitott félegyenesek. A B csúcs most a B_1 , illetve a B_2 pont. A $C=B_1$, vagy $C=B_2$ választással elfajult esethez jutunk. (5. ábra.)

III. Legyen a derékszögű csúcs A !

A pontthalmaz felkutatásához használjunk koordináta-geometriai módszert. Válasszuk ordinátatengelynek az a egyenest, abszcisszatengelynek pedig az AA' egyenest! (6. ábra.) Legyen $A(-\alpha; 0)$ és $B(0; \beta)$; az A pont legyen az abszcisszatengely negatív felén — tehát $\alpha > 0$. Ezen jelöléssel $A'(\alpha; 0)$. A C pont a BA' egyenes és az AB egyenesre az A pontban állított merőleges egyenes metszéspontja. Írjuk fel a szóban forgó egyenesek egyenletét!

AB egyenes egyenlete: $\beta x + \alpha y = \alpha\beta$,

AC egyenes egyenlete: $\alpha x + \beta y = -\alpha^2$.

Oldjuk meg ezen egyenletrendszert; α adott (pozitív) valós szám, β paraméter (a változó helyzetű B pont második koordinátája)!

$$x = \frac{\alpha \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad y = \frac{-2\alpha^2 \beta}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Mint hogy A és C ellentétes félsíkokban kell legyenek ezért $x > 0$ kell legyen, ami akkor teljesül, ha $|\beta| > \alpha$. $C(x; y)$ koordinátái között a β paraméter létesíti a kapcsolatot — a kapott eredmény a C pontok halmazának paraméteres egyenletrendszere. Küszöböljük ki a β paramétert!

Fejezzük ki β^2 -et x -szel: $\beta^2 = \alpha^2 \cdot \frac{x+\alpha}{x-\alpha}$. He-

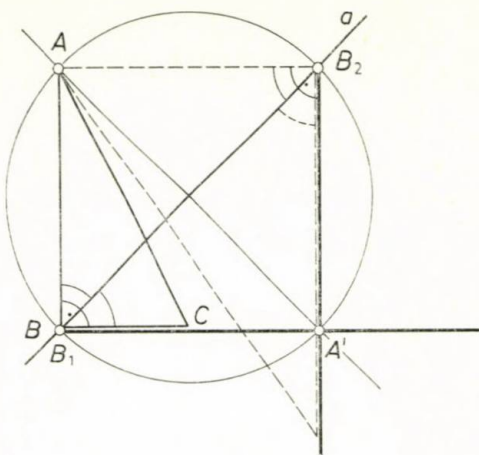
lyettesítsük ezt az y -ra kapott kifejezésbe — amit azonban előbb emeljünk négyzetre:

$$y^2 = \frac{4\alpha^4 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{x+\alpha}{x-\alpha}}{\left(\frac{2\alpha^3}{x-\alpha}\right)^2} = x^2 - \alpha^2.$$

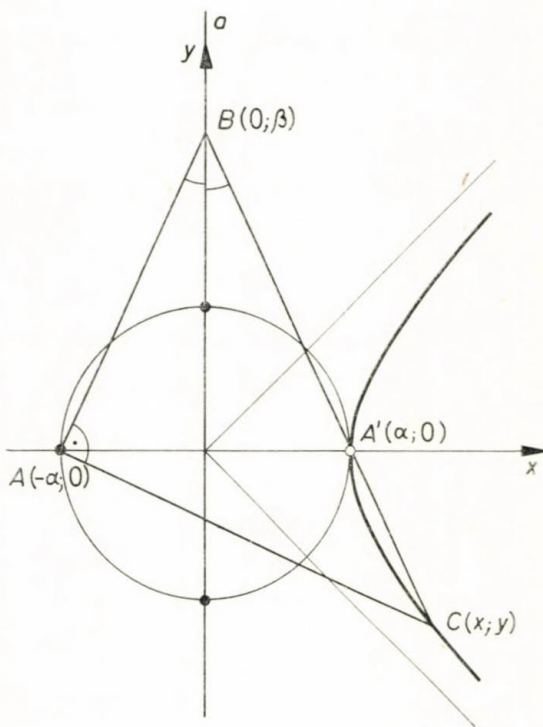
Rendezéssel:

$$x^2 - y^2 = \alpha^2.$$

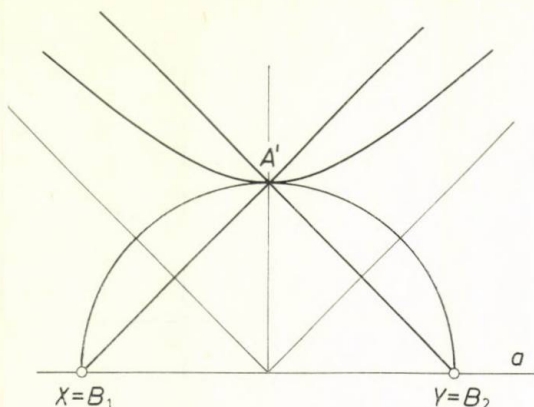
Ez pedig egy középponti helyzetű hiperbola egyenlete, — amelynek aszimptótái merőlegesek egymásra; illetve a korábban tett $x > 0$ kikötés miatt a hiperbola egyik ága. Hiányzik azonban a hiperbola abszcisszatengelyre eső pontja; ugyanis ha β tart a végtelenbe, akkor x tart α -hoz és y tart 0-hoz. $C(\alpha; 0)$ tehát csak akkor adódhatna, ha B -t a végtelenben vesszük fel (elfajult eset).



5. ábra



6. ábra



7. ábra

egyenletet!

Megoldás: Egyenletünk akkor és csak akkor áll, ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\ln(k^2 \cdot \sin^2 x_k)} + e^{-\ln(k^2 \cdot \sin^2 x_k)}}{2} = \left(\sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \right)^2,$$

azaz ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(k^2 \cdot \sin^2 x_k + \frac{1}{k^2 \cdot \sin^2 x_k} \right) = n.$$

De

$$n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(k^2 \cdot \sin^2 x_k + \frac{1}{k^2 \cdot \sin^2 x_k} \right) \geq \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2 \cdot \sin^2 x_k \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \sin^2 x_k}} = n,$$

miatt az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha

$$k^2 \cdot \sin^2 x_k = \frac{1}{k^2 \cdot \sin^2 x_k},$$

azaz

$$\sin^4 x_k = \frac{1}{k^4}.$$

Mivel $\sin^2 x \geq 0$, ezért előbbiből

$$\sin^2 x_k = \frac{1}{k^2},$$

és ezért

$$\sin x_k = \frac{1}{k} \quad \text{vagy} \quad \sin x_k = -\frac{1}{k}.$$

Ezekből

$$x_k = (-1)^r \arcsin \frac{1}{k} + r\pi,$$

illetve

$$x_k = (-1)^{r+1} \arcsin \frac{1}{k} + r\pi, \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy egyenletünk megoldásait kaptuk.

A megoldók száma: 17.

Bencze Mihály, Brassó és Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Összefoglalva: a keresett ponthalmaz ebben az esetben egy 2α valós tengelyű és ugyancsak 2α képzetes tengelyű, csúcspontjától (tengelypontjától) megfosztott hiperbolaág. A B pontok halmaza az a egyenesnek két nyitott félegyenesre. A 7. ábra a három eset egyesítésével ábrázolja feladatunk megoldását.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely és
Zsidó-Nagy György, Kolozsvár
A megoldók száma: 19.

1044. Oldjuk meg a valós számokon értelmezett

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ch} [\ln(k^2 \cdot \sin^2 x_k)] =$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} \right)^2$$

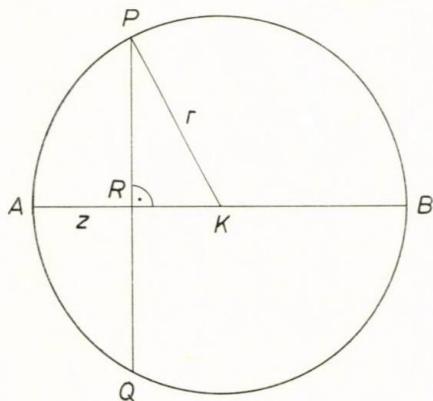
Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

1045. Egy forgáskúp alapkörének sugara r , alkotójának hossza pedig l egységnyi. Parabola metszetei közül melyiknek a területe a legnagyobb?

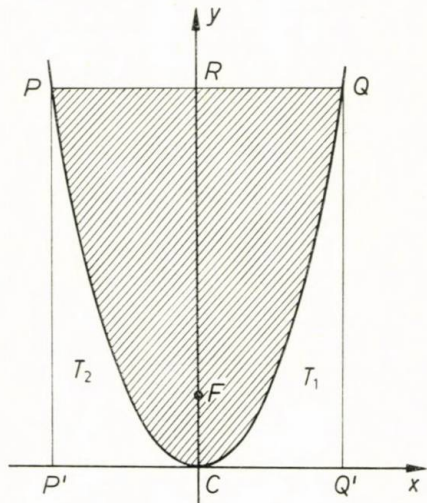
Megoldás: A borítón található ábra jelöléseivel legyen $CF = \frac{p}{2}$, ahol p a parabola paramétere. Mivel

$TCF\Delta \sim AEK\Delta$, valamint $TCF\Delta$ -ben $TC = \frac{1}{2} \cdot z$, ahol $0 < z < 2r$ ezért $\frac{p}{z} = \frac{r}{l}$ azaz $p = \frac{r}{l} \cdot z$.

Továbbá (8. ábra)



8. ábra



9. ábra

$$RP = RQ = \sqrt{r^2 - (r-z)^2} = \sqrt{2rz - z^2},$$

ezért az x, y koordináta-rendszerben a P', Q' pontok koordinátáira

$$P'(-\sqrt{2rz - z^2}; 0) \quad Q'(\sqrt{2rz - z^2}; 0) \text{ adódik.}$$

A $CRK_1\Delta \sim KEB\Delta$, ezért

$$\frac{RC}{r - \frac{1}{2}z} = \frac{l}{r}, \quad \text{így} \quad RC = \frac{l(2r - z)}{2r}.$$

A parabola egyenlete az x, y derékszögű koordináta-rendszerben

$$y = \frac{l}{2rz} x^2.$$

A továbbiakban megadjuk a metszet területét z függvényében úgy, hogy a 9. ábrán látható $PQP'Q'$ téglalap területéből kivonjuk $T_1 = T_2$ területű parabolikus háromszögek területét.

$$T_{PQP'Q'} = RC \cdot P'Q' = \frac{l}{r} (2r - z) \sqrt{2rz - z^2}, \quad \text{azaz}$$

$$T_{PQP'Q'} = \frac{l}{r} \sqrt{z(2r - z)^3}.$$

Ezért

$$T_1 + T_2 = 2T_1 = 2 \int_0^{\sqrt{z(2r-z)}} \frac{l}{2rz} x^2 dx = \left[\frac{lx^3}{3rz} \right]_0^{\sqrt{z(2r-z)}} = \frac{l}{3r} \sqrt{z(2r-z)^3} = \frac{1}{3} T_{PQP'Q'}.$$

Ezért

$$T_{\text{metszet}}(z) = \frac{2l}{3r} \sqrt{z(2r-z)^3}.$$

A $T_m(z)$ függvény szélsőérték-helyét, illetve szélsőértékét a derivált segítségével keressük meg.

A közvetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$T'_m(z) = \frac{(2r-z)^3 - 3z(2r-z)^2}{2\sqrt{z(2r-z)^3}} \cdot \frac{2l}{3r},$$

azaz

$$T'_m(z) = \frac{l}{3r} \cdot \frac{2(2r-z)(r-2z)}{\sqrt{z(2r-z)^3}}.$$

Szélsőérték létezésének szükséges feltétele a derivált eltűnése, ha a derivált előjelet váltva zérus a hely környezetében, úgy ebből következik a szélsőérték létezése.

$T'_m(z)=0$ a $0 < z < 2r$ értelmezési tartományon belül,

ha

$$z = \frac{r}{2}.$$

A $T'_m(z)$ derivált előjelét csupán az $r-2z$ tényező befolyásolja hiszen minden más tényező pozitív

Így, ha $0 < z < \frac{r}{2}$, akkor $T'_m(z) > 0$, illetve ha $\frac{r}{2} < z < 2r$, $T'_m(z) < 0$. Táblázatba foglalva:

z	$0 < z < \frac{r}{2}$	$z = \frac{r}{2}$	$\frac{r}{2} < z < 2r$
$T'_m(z)$	+	0	-
$T_m(z)$		lok. max. $\frac{lr\sqrt{3}}{2}$	

$T_{\max} = \frac{lr\sqrt{3}}{2}$ a $T_m(z)$ függvénynek abszolút maximuma is. Ha az S metszősíkot (8. ábra $S \parallel l$) úgy választjuk meg, hogy a kúp alapkörének síkjával való metszészvonala, a PQ egyenes éppen negyedeli a kör AB átmérőjét, akkor a maximális területű parabolametszetet kapjuk.

Kondor Judit, Budapest

A megoldók száma: 19.

1046. Bizonyítsuk be: $n-1$ egyenes elégséges ahhoz, hogy egy $n \times n$ -es ($n \geq 3$) tábla valamennyi mezőjének belsején áthaladjon!

Megoldás: Az $n-1$ egyenes egy lehetséges elhelyezési módját adjuk meg az $n \times n$ -es sakktáblán úgy, hogy azok a feladat feltételeinek eleget tegyenek.

Helyezzük el a táblát úgy, hogy egyik csúcsa az origóba essen, a koordinátatengelyek pedig a tábla egy-egy szélét adják. A tábla egységnégyzetekből álljon. Így a tábla sarkainak koordinátái rendre: $(0; 0)$, $(n; 0)$, $(n; n)$, $(0; n)$.

Az $n \times n$ -es sakktábla origón áthaladó átlója az $y=x$ egyenes. Ez n egységnégyzet középpontját köti össze. A két szélsőt (a sakktábla sarkainál levőket) elhagyva, $n-2$ egységnégyzetet kapunk, melyek középpontjain át rajzoljuk meg az $m=-2$ iránytangensű egyeneseket (10. ábra). Egyenle-

$$y = -2x + \frac{3}{2} + 3i, \text{ ahol } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Ezek négy kivétellel minden egységnégyzeten egyszer áthaladnak. A négy kimaradt négyzet középpontjának koordinátái endre:

$$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$P_3\left(n-\frac{1}{2}, n-\frac{3}{2}\right),$$

$$P_4\left(n-\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right).$$

Az

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ és az } \left(n-\frac{1}{2}, n-1\right)$$

pontokon áthaladó,

$$y = \frac{n-2}{n-1}x + \frac{n}{2(n-1)}$$

egyenletű egyenes e négy mező belsején áthalad, így a feladat állítását igazoltuk.

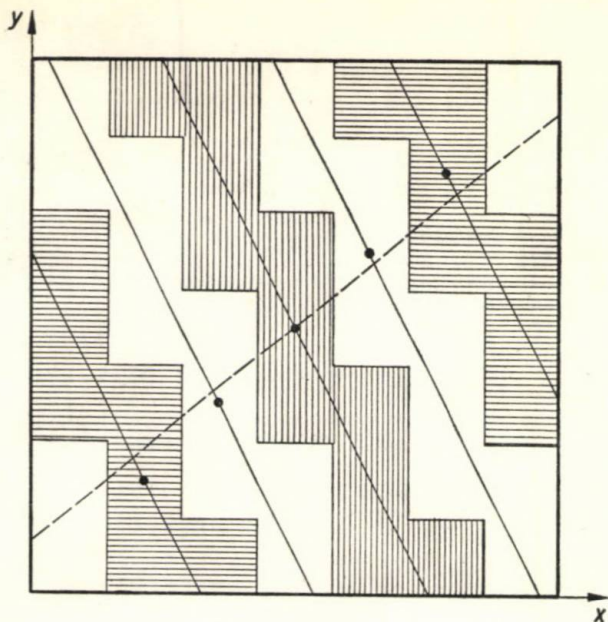
Megjegyzések: 1. Az $n=2$ -re a feladat állítása nem igaz, hiszen bármely egyenesnek a 2×2 tábla legfeljebb 2 mezőjével lehet közös belső pontja.

2. A fenti módszer nem az egyetlen lehetőség négyzetek lefedésére. A 11. ábra egy, páratlan n -re általánosítható elrendezést mutat.

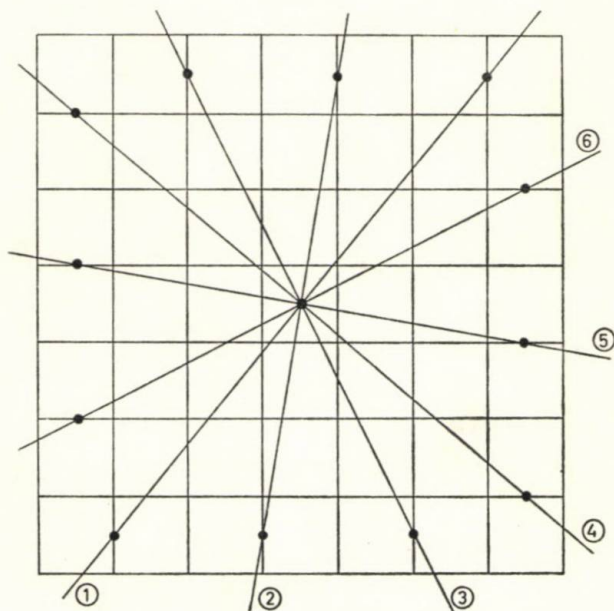
Szánthó Gyula, Gyula

3. $m \leq n$ -re jelölje $f(m, n)$ egy $m \times n$ -es tábla feladat szerinti lefedéséhez szükséges egyenesek minimális számát. Nyilvánvaló, hogy $f(1, n)=1$, $f(2, n)=2$, $f(n-1, n) \leq n-1$. Könnyen igazolhatjuk, hogy $f(3, 4)=3$, $f(4, 5)=4$, $f(5, 6)=5$. Így $f(3, n)=3$, $f(4, n)=4$ és $f(5, n)=5$. Ha $f(n-1, n)=n-1$, akkor $f(m, n)$ egyértelműen meghatározott minden m, n -re: $f(n-k, n)=n-k$, ha $0 < k < n$ és $n \geq 3$; $f(n, n)=n-1$. Az $f(n-1, n)=n-1$ igazolásához indukcióval juthatunk.

A megoldók száma: 7.



10. ábra



11. ábra

A megoldók névsora (1035—1046.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1035—1037., 1041., 1043.); Bagi Gábor, Barcs (1035., 1037., 1042.); Bencze Mihály, Brassó (1035—1037., 1040., 1042., 1044.); Bokor József, Szeged (1041., 1043.); Cseh László, Kolozsvár (1041—1044., 1046.); Csorba Ferenc, Győr (1042., 1043., 1045.); Földeák Árpád, Budapest (1045.); Földváry József, Papos (1035., 1038.); Giczi Margit, Sümeg (1042., 1043.); Görbe Mihály, Mátészalka (1045.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1035., 1036.); Hajna János, Pécs (1035., 1038., 1040., 1042—1045.); Hársatakiné Dékány Veronika, Budapest (1042.); Honti Dénes, Győr (1041—1043.); Horváth Tibor, Dunakeszi (1035., 1036., 1041—1043., 1045., 1046.); Illés Istvánné, Kiskunfélegyháza (1035—1038., 1042—1046.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1035—1038., 1041—1045.); Kondor Judit, Budapest (1037., 1042., 1044., 1045.); Kormos Gizella, Sümeg (1042.); Kovács Sándor, Komárom (1041., 1042., 1044., 1045.); K. Tóth György, Békéscsaba (1043., 1045.); Dr. Major Pál, Budapest (1035., 1037., 1038., 1042., 1043.); Medgyesi Zsuzsanna, Nagyrécsce (1035., 1038.); Merényi Imre, Kolozsvár (1035., 1041—1044.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1035., 1037—1039., 1041—1044.); Moyses Károly, Szeged (1035.); Nagy Elekné, Pécs (1041., 1042.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1038.); Németh László, Vasvár (1042., 1044., 1045.); Nyíró László, Mezőkövesd (1037., 1039., 1042., 1044.); Peták Tamás, Szolnok (1035.); Polcz Katalin, Pécs (1041., 1042., 1044., 1045.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1037.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1035., 1037., 1041., 1045.); Spissich László, Pápa (1041. 2. mód, 1042—1045.); Sugár György, Budapest (1035., 1038.); Szabó Jánosné, Békéscsaba (1041., 1042.); Szánthó Gyula, Gyula (1035—1038., 1040., 1042—1046.); Szász Róbert, Marosvásárhely (1035—1037., 1039., 1040.); Tóth Géza, Cegléd (1043.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1035., 1037., 1038., 1040., 1042—1044.); Udvari Tibor, Baja (1041—1046.); Unger János, Szeged (1035.); Varga István, Nagyszalonta (1035., 1037., 1038., 1042., 1044., 1045.); Zalán Péterné, Budapest (1035., 1041., 1042., 1045., 1046.); Zábrádiné Schmierer Emília, Győr (1042.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1042—1046.).

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

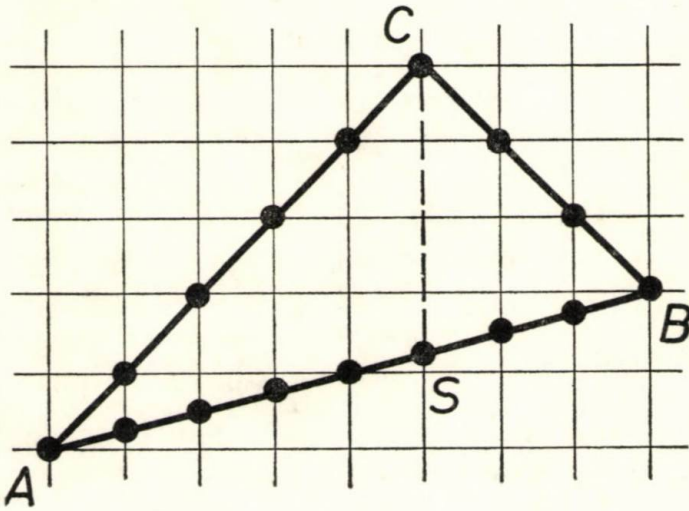
<i>Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához</i> (83 015)	45,—
<i>Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához</i> (83 028)	51,—
Kovácsné—Novákné—Sztrókainé—Szerediné: <i>Tanári kézikönyv, általános iskola.</i>	
<i>Matematika 7.</i> (83 022)	52,—
Gáll Éva: <i>Vigyázat! Csak gyerekeknek</i> (1998/1)	9,—
Gáll Éva: <i>Matematikaország határán</i> (1998/2)	20,—
Lukács Ottó: <i>Gyerekmatek</i> (1995/5)	17,—
Hátori Miklós: <i>Halmazok. Matematikai logika</i> (1991)	10,—
Hátori Miklós: <i>Tanulás és tanítás számítógéppel</i> (52 983)	29,—
Korovkin: <i>Egyenlőtlenségek</i> (29 238)	7,—

Beszerezhetők

- a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053. Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Tankönyvboltban (1051. Bp., Október 6. u. 8.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



3

1984. május * XXXI. évfolyam

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAI LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁS

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

84-902 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalván-
nyon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi
jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66
betűhely. Szíveskedjenek közölni a következ-
ő adatokat is:

a) személyi számukat, b) asszonyok leánykori
nevüket, c) lakáscímüket — irányítószámmal,
d) foglalkozásukat (beosztásukat), e) munka-
helyük pontos megnevezését, f) munkahelyük
címét — irányítószámmal.

TARTALOM

<i>Dr. Iker János:</i> Meddig juthatunk el az álta- lános iskolában a kombinatorikus gon- dolkodás fejlesztésében?	65
<i>Dr. Ambrus András—Dr. David Gunter:</i> Matematikai tételek megsejtését szolgáló reduktív eljárások	68
<i>Dr. Zergi István:</i> A $2n$ csúcspontú síkbeli sokszögek területének egy nevezetes tu- lajdonsága	81
<i>Fitos László:</i> Az egyenlő oldalú tetraéder élrintő gömbjeiről	83
<i>Késedi Ferenc:</i> Térbeli homogén pontkoor- dináták alkalmazása a lineáris geomet- riában	86
A Bolyai János Matematikai Társulat ver- senye matematikatanárook számára	95

<i>Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes:</i> Matematikai összejövetelek az Egyetemes Eszperantó Kongresszus keretében Budapesten	96
Új könyvek	IV.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Д-р Икер Янош:</i> До какого уровня можно продвинуться в начальной школе в раз- витии комбинаторного мышления? ..	65
<i>Д-р Амбруш Андраш, Д-р Гунтер Давид:</i> Редукционные методы для предуга- дывания математических теорем	68
<i>Д-р Зерги Иштван:</i> Одно знаменитое свойство площади многоугольников с $2n$ вершинами на плоскости	81
<i>Фитос Ласло:</i> О шарах, касающихся граней равностороннего тетраэдра ..	83
<i>Кеседи Ференц:</i> Применение простран- ственных однородных точечных коор- динат в линейной геометрии	86
Соревнование математического Об- щества им. Яноша Бояи для учителей математики	95
<i>Д-р Берényi Жужанна Агнеш:</i> Матема- тические встречи в Будапеште в рам- ках Универсального Эсперанто Кон- гресса	96
Новые книги	IV.

INHALT

<i>Dr. Iker, János:</i> Wie weit können wir in der Grundschule gelangen, was die Entwick- lung der kombinatorischen Denkweise anbelangt?	65
<i>Dr. Ambrus, András—Dr. Gunter, David:</i> Reduktive Verfahren, die zum Voraus- ahmen mathematischer Sätze dienen	68
<i>Dr. Zergi, István:</i> Eine merkwürdige Eigen- schaft des Inhalts der ebenen $2n$ -Ecke	81
<i>Fitos, László:</i> Über die Kantenberührenden Kugeln jener Tetraeder, die kongruente Seitenflächen haben	83
<i>Késedi, Ferenc:</i> Über die Verwendung räum- licher, homogener Punktkoordinaten in der linearen Geometrie	86
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathe- matischen Gesellschaft für die Mathema- tiklehrer	95
<i>Frl. Dr. Zsuzsanna Ágnes Berényi:</i> Mathe- matiker-Zusammenkünfte im Rahmen des Universalen Esperanto-Kongresses in Budapest	96
Neue Bücher	IV.

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. IKER JÁNOS
főiskolai adjunktus
Szombathely

Meddig juthatunk el az általános iskolában a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésében?

A Matematika Tanítása 1982. évi 6. száma foglalkozott a kombinatorika tanításának 6. osztályos jellemzőivel. Ez az írás részben folytatása az említett cikknek; részben összefoglalása a kombinatorikus gondolkodás általános iskolai fejlesztésének.

Az összefoglalást egy konkrét probléma különböző szintű megoldásain keresztül kívánom bemutatni; természetesen

elhagyva a kombinatorika tanítására vonatkozó általános megállapításokat, amelyek már az említett cikkben szerepelnek. Ugyanakkor kicsit részletesebben célszerű foglalkozni a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésének 7. és 8. osztályos lehetőségeivel, és ide kívánczik egy szakköri jellegű feladat megoldása is.

A konkrét probléma a következő:

Hányféleképpen olvasható ki az alábbi táblázatból az ISKOLA szó?

I	S	K	O
S	K	O	L
K	O	L	A

A probléma 3. osztálytól 8. osztályig szinte bármikor feladható. Az elvárható megoldás módja azonban a tanulók gondolkodási szintjétől, és — a különböző kombinatorikus problémákban — az összes esetek összeszámlálásában szerzett tapasztalatoktól függően más és más.

Harmadik, negyedik osztályban az

összes eset megállapítását azok tényleges előállításai jellemzi; bizonyos rendezés alapján. Így a feladat kitűzésekor a munkalapon célszerű előre megrajzolni legalább 10 üres négyszer hármastáblázatot, amelybe a tanulók az egyes „olvasatokat” — egymástól megkülönböztetve — beírhatják. Például így:

I	S	K	O
			L
			A

I	S	K	
		O	L
			A

I	S	K	
		O	
		L	A

Ötödik, hatodik osztályban az olvasási készség fejlettsége, és a több hasonló, de változó paraméterű feladat megoldása lehetővé teszi, hogy az összeszámláláshoz már nem szükséges minden eset lejegye-

zése. Néhány eset kiolvasása után már átfogalmazható a feladat: hányféleképpen juthatunk el olvasással a bal felső sarok I betűjétől a jobb alsó sarok A betűjéig, ha az egyes betűktől csak az eggyel jobb-

ra vagy lefelé álló betű felé haladhatunk. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy az egyes betűkhöz hányféleképpen juthatunk el olvasással. Ezt célszerű táblázatba beleírni, és az első néhány betűig kezdetben ellenőrizni is az olvasási lehetőségek számát (ez a módszer egyébként már bármilyen nagy betűtáblázat esetén gyors és megbízható összeszámlálást biztosít):

I ¹	S ¹	K ¹	O ¹
S ¹	K ²	O ³	L ⁴
K ¹	O ³	L ⁶	A ¹⁰

I → S ¹ → K ¹	•
↓ S ¹ → K ² → O ³	•
↓ K ¹	•

Hetedik osztálytól az egyszerűbb kombinatorikai feladatok megoldásában már bizonyos gyakorlottságot várunk el a tanulóktól és folyamatosan érlelődik a világos és eléggé egyértelmű 8. osztályos minimum követelmény. Eszerint a tanulóknak fel kell ismerniük a tanultakhoz hasonló kombinatorikus problémákat különböző megjelenésű tárgyi feladatokban, és a tanultakhoz hasonló feladatokban meg kell tudni oldani. E követelményhez nélkülözhetetlen az összefüggések felismerése, amelyekhez viszont csak úgy juthatunk el, hogy az egyes kombinatorikai problémákban megkezdjük az elvonatkoztatást a konkrét tárgyi megjelenítéstől, és fokozatosan haladunk az általánosabb megfogalmazások felé.

A mi konkrét problémánkban ez a következő módon valósulhat meg: a megoldás során vizsgáljuk meg hány lépésből állnak az egyes „olvasatok”? Megállapítható, hogy az ISKOLA szó kiolvasása minden esetben 5 lépésből (betűkapcsolásból) áll. Azt is könnyen felfedezhetik

a tanulók (természetesen a konkrét kiolvasások ismételt felhasználásával), hogy minden „olvasat” 3 jobbra és 2 lefelé irányuló lépéssel áll elő. Ha eddig már eljutottunk a tanulókkal; csábító a gondolat, hogy azonnali megoldást erőszakoljunk oly módon, hogy itt már csak az a kérdés: hányféleképpen lehet 5 lépésből kettőt vagy hármat kiválasztani. Ez azonban csak a kombinációt már ismerők számára a feladatmegoldás gyors lehetősége, de semmiképpen sem módszeres útja a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésének.

Ezért célszerű előbb inkább megvizsgáltatni az egyes „olvasatokban” a lefelé és a jobbra történő lépések viszonyát. Ez úgy történhet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk 2 lépést lefelé és megvizsgáljuk, hogy azokhoz hogyan választható 3 lépés jobbra, vagy fordítva: 3 jobbra történő lépéshez hányféleképpen választható 2 lépés lefelé (természetesen úgy, hogy az iskola szót ki tudjuk olvasni).

Több esetet — akár az összeset is — megvizsgálva megállapíthatják a tanulók, hogy elegendő csupán pl. a lefelé irányuló lépések elhelyezése, hiszen ezekhez a jobbra történő lépések már egyértelműen meghatározottak (vagy fordítva). Tehát most már az a kérdés, hogy hányféleképpen lehet az 5 lépésből 2 lefelé vagy 3 jobbra irányulót kiválasztani.

A probléma ilyen átfogalmazásával már elég közel jutottunk az általánosabb megoldás lehetőségéhez, de a konkrét összeszámlálást még mindig nem célszerű elsietni. Ugyanis, ha ezek után tudnánk az eredeti problémához hasonló (de egyszerűbb megfogalmazású) feladatot felismertetni a tanulókkal, akkor egyrészt esetleg az összes eset összeszámlálását tovább könnyíthetnénk, másrészt a — kombinatorikai fogalmak kialakításához szükséges — közös vonások felismertetésében jelentős módszertani lépést tehetnénk.

Kínálkozik is vizsgálatra pl. a 7. osztályos munkalapok közül a 97. oldal 1. vagy 2. feladata.

A feladatok röviden a következők:

Egy ötrekeszű dobozban hányféle sorrendben helyezhető el:

1. 2 piros és 3 kék golyó,
2. 3 piros és 2 kék golyó.

Az összehasonlítást az alábbi összetett kérdéssel célszerű indítani: miben hasonlítanak a feladatok az eredeti problémához, és miben különböznek tőle?

Feltételezhető, hogy a tanulók megtalálják a közös tartalmat, hisz az előzmények után felismerhető, hogy itt az első feladatban például öt helyből elegendő kiválasztani a két piros (a második feladatban a két kék) golyó elhelyezésének lehetőségeit; a többi három hely már a másik szín számára meghatározott (akár nem is szükséges őket berakni).

Tehát a közös tulajdonság az, hogy 5 elemből kell kiválasztani minden esetben 2 elemet az összes lehetséges módon. A különbség csupán az elemek tárgyi megjelenése: az eredeti problémában olvasási lépések, az utóbbi esetekben a golyók rekeszei.

Ezután már elegendő összeszámlálni azt, hogy 5 rekesz közül hányféleképpen választható ki 2 (pl. a piros golyók számára), és ezt ellenőrzésképpen összevethetjük az eredeti feladat korábbi (5–6. osztályos) megoldási módszerével kapott eredménnyel.

Az összeszámlálást kétféleképpen végezhetjük:

a) A két piros golyó közül az egyiket az első rekeszbe tesszük, akkor a másik a fennmaradó 4 üres rekesz bármelyikébe kerülhet. Ez négy eset. Ha az egyik golyót a második rekeszbe tesszük, akkor a másikat a további három rekesz valamelyikébe (az elsőbe már nem tehetjük, hisz azt, hogy az első kettőben van golyó, már előbb számbavettük).

Továbbfolytatva az egyik golyót előbb a harmadik (ekkor a másikat a további 2 helyre), majd a negyedik rekeszbe tesszük (ekkor a másik az ötödik rekeszbe kerül).

Így minden elhelyezési lehetőséget csak egyszer számoltunk össze és módszerünk szerint csoportosítva az összes eset:

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10.$$

b) A két golyó közül az egyiket az 5 hely bármelyikére tehetem. Az így elhelyezett golyóhoz a másikat — mind az öt esetben — a fennmaradó 4 üres hely bármelyikére tehetem. Tehát így $5 \cdot 4$ féle elhelyezést készíthetnénk. De így minden esetet kétszer számolnánk össze (hisz pl. a 12, 21 elhelyezést ugyanazt jelenti).

$$\text{Az összes eset: } \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Az összeszámlálás persze egyféle (akár a fentiektől különböző) módon is elvégezhető és átvihető az eredeti problémára, majd összevethető annak korábbi módon meghatározott eredményével.

Maga a módszer továbbfolytatható matematikailag azonos tartalmú kombinatorikai problémák felismertetésével és megoldásával, amelyhez jó példákat találhatunk a 8. osztályos munkalapokon.

Természetesen a kombinatorikai problémák ilyen jellegű vizsgálata sok időt, energiát és talán ötletet is igényel. De ezek a vizsgálatok a szerényebb képességű tanulóknál is megalapozhatják a kombinatorikai problémák megértését, az összeszámlálási módszerek alkalmazását; a kiváló képességűeknél pedig jelentősen fejleszthetik a problémamegoldó gondolkodást, amelyet szakkörben is jól kamatoztathatunk. Éppen ezért az eredeti problémához kapcsolódva bemutatok egy — talán nem túl szokványos — szakköri feladatot, amely esetleg a tanítási anyaghoz kapcsolódó feladatkészítés mintájaként is szolgálhat szakkörvezető matematikatanárok számára.

Feladat:

Hányféleképpen tölthető ki az alábbi 4×3 -as táblázat az ISKOLA szó betűivel úgy, hogy a bal felső sarokból (mindig egy hellyel jobbra vagy lefelé haladva) a jobb alsó sarokig az ISKOLA szó pontosan 9 féleképpen legyen kiolvasható?

A feladat megoldásában nagy segítségünkre van az eredeti probléma már meghatározott „számszerű eredménye”, valamint a konkrét kiolvadásokhoz kapcsolódó tapasztalat. Ugyanis az eredeti probléma megoldásából világos, hogy a legjobb kitöltés (első ábra) mellett a bal felső sarokból a jobb alsó sarokig vezető „olvasatok” száma (5 lépésből pl. 2 lefelé irányuló kiválasztásával) 10. Tehát ahhoz, hogy pontosan 9 féleképpen legyen kiolvasható az ISKOLA szó: az eredetileg kitöltött táblázat olyan helyén kell változtatni betűt, amelyen csak egy „olvasat” halad át. Ehhez pedig tudni kell, hogy a táblázat egyes betűhelyein hány „olvasat” halad át. Itt használhatjuk fel a konkrét kiolvadásoknál szerzett tapasztalatokat, és ezek alapján a táblázat betűhelyeire beírható az azon a he-

lyen áthaladó „olvasatok” száma:

10	6	3	1
4	6	6	4
1	3	6	10

Ebből a táblázatból világos, hogy a bal alsó sarok vagy a jobb felső sarok közül az egyik helyen megváltoztatva az eredeti (K vagy O) betűt — pontosan 9 úton lesz a megfelelő szó olvasható (a tizediken a változtatás miatt nem). Mivel a két betűhely közül egyidejűleg csak egyiket változtathatunk — az ISKOLA szó másik 5 betűjének valamelyikére — a lehetőségek száma $5 + 5 = 10$. Azaz a két hely változtatásával 10 különböző kitöltés található úgy, hogy az ISKOLA szó pontosan 9 féleképpen olvasható ki.

A probléma tovább folytatható és nehezíthető pl. olyan kérdéssel, hogy hányféleképpen tölthető ki a táblázat úgy, hogy az ISKOLA szó legalább 6 féleképpen legyen kiolvasható. De ez már inkább csak az olvasók számára.

DR. AMBRUS ANDRÁS
ELTE
Budapest

DR. DAVID GUNTER
Friedrich Schiller Egyetem
Jéna

Matematikai tételek megsejtését szolgáló reduktív eljárások

Az iskolai matematika-tananyag jelentős részét képezik tételek és bizonyításaik. Matematikai tételeket kétféle módon taníthatunk:

1. A tételt előre közöljük, és csak a bizonyítás elvégzésébe vonjuk be a tanulókat.

„Nem kész, matematikailag már kidolgozott ismeretanyag átadása az elsődleges, hanem az ismeretekhez vezető gondolkodásmód, tevékenység fejlesztése.”

(Kártszi Ferenc)

2. Megsejtetjük a tételt a tanulókkal, majd a bevonásukkal következik a bizonyítás.

Úgy véljük, hogy a második mód hatékonyabb. Alkalmazása esetén minden tanuló részt vehet az ismeretszerzési folyamat minden fázisában. Egy-egy tétel önálló megsejtése, felfedezése jelentősen

hozzájárulhat a tanulók ismeretszerzéshez fűződő optimizmusához, önbizalmuk megerősödéséhez. Az oly sokszor misztifikált, nehéznek tartott matematikai munka szerves, hatékony művelői lesznek, csökken a matematikától való félelmük.

Cikkünkben e második mód tanítási gyakorlatban való alkalmazásával kapcsolatban néhány tartalmi és módszertani megjegyzést teszünk. (Egy következő cikkben a bizonyítások tanításával foglalkozunk.)

Sejtés és rávezető tevékenység

Reduktív eljárásnak nevezzük a már megszerzett ismeretekből kiinduló új tételek megsejtését eredményező tevékenységet. A kapott tételek úgy válnak a tudomány elfogadott részévé, ha igaz voltukat be is bizonyítjuk.

FELIX KLEIN tanulságos szavait idézzük: „Gyakran hallani nem matematikusoktól, különösen filozófusoktól, hogy a matematika világosan megadott feltételekből levonható következtetések tudománya. Egészen más véleménye van annak, aki maga is produktívan műveli a matematikát. Némelyek csak a kikristályosított formára megírt matematikai tételeket vizsgálják. A matematikai kutató nem ilyen szigorú, deduktív módszerrel dolgozik, hanem felhasználja a fantáziáját és az induktív, heurisztikus segédeszközöket. Számos példát lehetne felhozni olyan híres matematikusokra, akik fontos tétel felfedezői voltak anélkül, hogy a bizonyítást is el tudták volna végezni. Mondhatjuk-e ezek alapján, hogy teljesítményük nem matematikai teljesítmény volt, és csak a rákövetkezők — akik elvégezték a tételek bizonyítását — alkottak igazi matematikát? Persze végül is önkényes, hogy mit értünk matematikai tevékenységen, de értéke csak akkor lesz, ha az induktív munka, a tétel

előszöri megsejtése legalább olyan súllyal esik latba, mint a deduktív tevékenység, mivel mindkettő egyformán szükséges, továbbá a felfedezés feltétele a későbbi következtetéseknek.” [1]

Klein azt is megjegyzi előbb idézett művében, hogy például a differenciál-számítás fejlődésének legműködőkésebb heurisztikus segédeszköze az értelmes szemlélet volt.

A világhírű matematikus véleménye mellett idézhetnénk pszichológiai tényeket, elveket, melyek szerint a hatékony ismeretszerzés alapfeltétele a tanulók aktív, tevékeny részvétele az oktatási folyamat minden fázisában. A gondolkodási alpműveletek — a matematikai alkotómunka alapelemei — csak működés, gyakorlás közben fejlődhetnek megfelelő mértékben.

A következőkben néhány reduktív eljárást ismertetünk példákkal illusztrálva és az oktatási gyakorlat számára szükséges következtetésekkel kiegészítve. Négy problémával foglalkozunk.

- I. Tételek megfordítása.
- II. Analógia.
- III. Általánosítás.
- IV. Indukció.

Felosztásunk nem teljes, csak e főbb típusok tárgyalására szorítkozunk. Példáinkat nemcsak az iskolai gyakorlatból választottuk ki, hiszen fő célunk a rávezető eljárások bemutatása, s ezek illusztrálására gyakran a nem iskolai tananyagból vett példák alkalmasabbak. Egy másik előzetes megjegyzés: az egyes eljárások bemutatását azok lényegének leírásával kezdjük. Mi a matematikaoktatásban használt értelmezésekkel foglalkozunk, ilyen értelemben eltérés lehet leíró, magyarázó meghatározásunk és a szabatos logikai definíciók között. Szükségesnek tartjuk annak rögzítését, hogy az egyes eljárásokon mit értünk, milyen értelemben használjuk őket.

I. TÉTELEK MEGFORDÍTÁSA*

„A matematika nyelvének és a logikának önálló-sított beillesztése a tananyagba nem hatékony. Megfelelő időben és alkalommal kell beleszőni a tanítás menetébe, midőn annak szükségessége és előnye meggyőzően kínálkozik, és tudatosítá-sa maradandó hatással van a gondolkodás fejlődésére.”

(Kárteszi Ferenc)

A matematikai tételek implikációs szerkezetűek. Legegyszerűbb esetben „Ha A , akkor B ” típusúak. Ilyen esetben a tétel megfordításán a „Ha B , akkor A ” kifejezést értjük. (A , B kijelentések vagy kijelen-tésformák.)

A kapott új kijelentés lehet igaz, de lehet hamis is. Példák:

T. (tétel): A kör támasztéglalapjai egybevágó négy-zetek. (Igaz.) M. (megfordítás): Ha egy idom támasz-téglalapjai egybevágó négyzetek, akkor az idom kör. (Hamis.) Ellenpélda: állandó szélességű idomok.

T.: Ha a parabola paramétere $p = \frac{1}{2}$, akkor alkalmas koordináta-rendszerben $y = x^2$ az egyenlete. (Igaz.)

M.: Ha $y = x^2$, akkor az $(x; y)$ pontok halmaza $p = \frac{1}{2}$ paraméterű parabola. (Igaz.)

Ha egy tétel feltétele több kijelentés konjunkciójából áll, akkor a kiindulási tétel megfordításaként értelmezzük nemcsak a teljes feltétel és az állítás felcserélésével ka-pott kijelentést, hanem a feltétel egy tagjának az állítással való felcserélésével kapott kijelentést is. Ilyen esetben egy tételhez többféle megfordítás is képezhető. Példa:

T.: Thalesz tétele: Egy kör bármely átmérőjéhez tartozó minden kerületi szög derék-szög. A tétel struktúrája: $F_1 \wedge F_2 \Rightarrow B$.

M₁: Ha α szög derékszög, akkor α egy kör kerületi szöge és szárai e kör valamely át-mérőjének végpontjaira illeszkednek. Struktúra: $B \Rightarrow F_1 \wedge F_2$. (Hamis.)

M₂: Ha α szög derékszög és szárai egy kör valamely átmérőjének végpontjaira illesz-kednek, akkor az α szög kerületi szög ebben a körben. (Igaz.) Struktúra: $B \wedge F_2 \Rightarrow \Rightarrow F_1$.

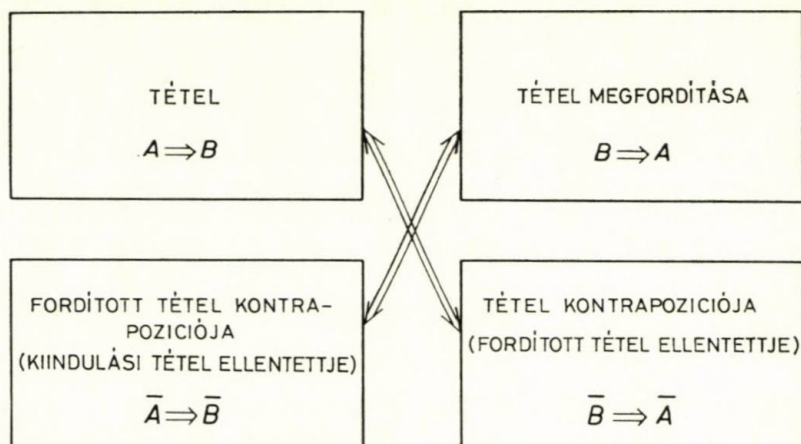
M₃: Ha az α szög kerületi szög egy körben és derékszög, akkor szárai a kör egyik átmérőjének végpontjaira illeszkednek. (Igaz.) Struktúra: $F_1 \wedge B \Rightarrow F_2$.

A tételek megfordításának problémaköre sok tanulói nehézség forrása. Főbb okok:

1. Az egyes tételek többféle logikai struktúrája.
2. Különböző nyelvi kifejezési lehetőségek.

* Dolgozatunkban a német szakirodalomban használatos tétel-feltétel-állítás terminusokat hasz-náljuk.

A lehetséges logikai kapcsolatokat az alábbi vázlat mutatja.



Tételek megfordítása az oktatási gyakorlatban

(Néhány kísérleti tapasztalat, következtetések.)

A különböző logikai struktúrák oktatási gyakorlatban való összekeveredésére egy példát mutat be WERNER WALSCH professzor [2]: Egy régebbi német tankönyv a hárommal való oszthatósági szabály ismertetése után — „Ha egy szám számjegyeinek összege osztható hárommal, akkor a szám osztható hárommal” — vizsgálja az 5743 számot és megállapítja: mivel a számjegyek összege nem osztható hárommal, következtethetünk arra, hogy a vizsgált szám nem osztható hárommal. A probléma az, hogy nem a kimondott tételt, hanem a megfordítás kontrapozícióját alkalmazta. Az idézett tétel és megfordítása is igaz, ezért a fenti alkalmazása nem vezetett hamis eredményhez. Viszont a tanulók fejében hamis kép alakulhat ki, rögződhet a tételek megfordításával kapcsolatban.

Tanulmányos kísérletet végeztek az NDK-ban Walsch professzor vezetésével. A kísérletben 800 tanuló vett részt. A következő kérdésekre szerettek volna választ kapni a kísérlet vezetői: A tanulók számára a „megfordítás” szó értelem-szerű, világos-e? Két adott tétel esetén felismerik-e, hogy egyik tétel a másik fordítottja? Képesek-e a tanulók adott tételek megfordítását önállóan elvégezni?

A kísérletben résztvevő tanulókat négy megyéből a 8—11. osztályokból választották ki. A felmérések során kétfajta feladat szerepelt:

1. Adott tételek megfordításának képzése.
2. Adott tételpárok esetén annak eldöntése, hogy tétel és megfordításáról van-e szó.

A felmérések tapasztalatai

1. Sok tanulónál a tétel megfordítása a tételrészek mechanikus felcserélését jelentette. Érdekes tapasztalat, hogy az anyanyelvi példák esetén is gyakori volt a tévedés. Például: „Ha Péter leteszi a mestervizsgát, magasabb fizetést fog kapni, és „Péter magasabb fizetést fog kapni, ha leteszi a mestervizsgát” állítások esetén csak a megkérdezett tanulók 43%-a látta helyesen, hogy nem egy állításról és annak megfordításáról van szó.

2. Jelentős számú tanulónak olyan képzelet alakult ki a megfordítással kapcsolatban, hogy megfordítás esetén tagadni kell valamit az adott tételben. „Ha egy p természetes szám osztható öttel, akkor a pr szorzat is osztható öttel” tétel megfordítására adott hibás megoldás: „Ha a p nem természetes szám öttel osztható, akkor a pr szorzat nem osztható öttel.”

Ez utóbbi állításban kétféle hiba is keveredik. A „ p természetes szám osztható öttel” állítás tagadása nem az, hogy „ p nem természetes szám öttel osztható”, hiszen az oszthatóság természetes számok körében értelmezett tulajdonság. (6. osztályban nem értelmezzük egész számok körében az oszthatóságot.) A másik hiba: „ p természetes szám öttel nem osztható”, akkor a pr szorzat lehet öttel osztható is, meg nem is.

3. Különböző logikai struktúra befolyása.

Tekintsük a következő állítás-sorozatot:

A : Minden ötnél kisebb természetes szám kielégíti a $4n < 20$ egyenlőtlenséget.

A^+ : Minden természetes szám, amely nem kisebb ötnél, nem elégíti ki a $4n < 20$ egyenlőtlenséget.

B : Ha egy egyenes egy kör középpontjára illeszkedik, akkor a kört két pontban metszi.

B^+ : Ha egy egyenes egy kört nem két pontban metsz, akkor nem megy át a kör középpontján.

E tételpárok vizsgálatánál a tanulók 20%-a vette csak észre, hogy az $A-A^+$ esetben tétel és megfordításról van szó. $A-B^+$ esetben a megkérdezett tanulók 28%-ának véleménye szerint megfordítás áll fenn, holott a B^+ tétel a B tétel kontrapozíciója, azaz vele ekvivalens.

4. Lényeges befolyást gyakorolt a tanulói teljesítményekre az adott tételek *nyelvtani szerkezete*. Ugyanazon tétel „Ha ..., akkor...” típusú megfogalmazása esetén lényegesen jobb eredményt értek el a tanulók (70%), mint „Minden...” típusú megfogalmazás esetén. Például a „Minden olyan szám, amely számjegyeinek összege osztható 9-cel, osztható 9-cel” tétel megfordítását csak a tanulók 37%-a végezte el helyesen.

Gyakori hibás válasz volt: „Kilencel osztható minden olyan szám, amely számjegyeinek összege osztható kilenc-

cel.” (Tételrészek mechanikus felcserélése.) Egy másik hibás válasz: „Ha minden szám kilencel osztható, akkor számjegyeinek összege is osztható kilencel.”

Az univerzális kvantor használata anyanyelvi példánál is sok gondot okozott. Például: „Minden olyan tanuló, aki rossz osztályzatot kap, nem játszhat az iskola kézilabdacsapatában” állítás megfordítására adott egyik válasz: „Ha minden kézilabdás rossz jegyet kap, nem játszhat az iskola csapatában.”

5. Tanulságos tapasztalat, hogy nem matematikai példák esetén csak kb. 1/3 rész volt a helyes válaszok aránya, míg matematikai példák esetén 55%.

Néhány fontosabb következtetés az oktatási gyakorlat számára

1. A „megfordítás”, „megfordítani”, „fordított” szavak jelentése az anyanyelvből ismert a tanulók számára, de sokrétű, többjelentésű szavakról van szó. Ha nem határoljuk el világosan, egyértelműen, hogy a matematikában mit jelent „tétel megfordítása”, akkor sok hibával fogunk találkozni.

2. Mivel a tanulóknak meg kell érteniük, mit jelent tétel megfordítása, képesnek kell lenniük adott tételek megfordítását képezni, ezért ezt a fogalmat ugyanolyan gondosan kell bevezetni és megerősíteni, mint a többi matematikai fogalmat. Nemcsak a tartalomra kell tekinteni az egyes tételek megfordításánál, hanem a tétel és megfordítása közötti viszonyra is, azaz a tartalomtól el kell vonatkoztatni.

A „tétel megfordítása” fogalom csak akkor válik éretté, ha a tartalomtól független logikai struktúraként él a tanuló tudatában. Az anyanyelv és a matematika tanárának oktatómunkáját egybe kell hangolni, mert mindkét tantárgy gondolkodásra neveli a fejlődő értelmet.

3. A megfordítás helyes végrehajtásának alapfeltétele, hogy a tanulók szét

tudják tagolni a matematikai tételeket feltételre és állításra.

4. A „tétel megfordítása” fogalmat egyszerű, áttekinthető szerkezetű tételeken kell bevezetni, begyakoroltatni. Feltétlenül szükséges már az elején olyan tételt is vizsgálni, amelynek megfordítása nem igaz. Különben a tétel és megfordítása közötti különbség helyes felfogása nehezebb lesz a tanulók számára.

5. A megfordítást nem szabad leszűkíteni a „Ha A, akkor B” típusú esetekre.

Vizsgálni kell különféle nyelvi megfogalmazási lehetőségeket. Tétel megfordításával ekvivalens annak kontrapozíciója. Ennek tudatos figyelembevételére törekedni kell.

6. Gyakran fordul elő az iskolai matematikatananyagban olyan tétel, amely megfordításának a bizonyítása a tanulók ismereteit meghaladó mértékű. Célszerű ilyen esetekben is megfogalmaztatni a tétel fordítottját. (Lásd pl. érintőnéyszögek tételének megfordítását!)

II. ANALÓGIA

„Mindenekelőtt hálás vagyok az Analógiáknak, legigazibb tanítómestereimnek. Ők ismerik a természet minden szektorát, alkalmazásukkal kevés dolog marad felfedezetlen.”

(Kepler)

Az analógia a gondolkodásnak az a formája, amely alkalmazásakor két vagy több jelenségnek, dolognak bizonyos tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrában való megegyezése alapján más tulajdonságban, viszonyban, struktúrában való megegyezést is sejtünk. Az eljárást szokás analógiás következtetési módnak nevezni. Sémája a következő:

1. *feltétel*: Az A objektum rendelkezik a, b, c, x tulajdonságokkal.

2. *feltétel*: B objektum rendelkezik az a, b, c tulajdonságokkal.

Következtetés: Valószínű, hogy B rendelkezik x tulajdonsággal is.

PÓLYA GYÖRGY szerint az analógia a hasonlóság egy fajtája. Hasonlónak mondunk két dolgot, ha megfelelő részeik egyforma kapcsolatban vannak.

Analóg alakzatok

1. *Téglalap — téglatest.*

A téglalap oldalaira teljesül: minden oldala párhuzamos egyetlen másik oldallal és merőleges a többi oldalra.

A téglatest minden lapja párhuzamos egy másik lappal és merőleges a többi lapra.

2. *Háromszög — tetraéder.*

A háromszög olyan zárt, síkbeli alakzat, amelyet minimális számú szakasz határol. A tetraéder olyan zárt, térbeli alakzat, amelyet minimális számú síklap határol.

3. *Háromszög — gúla.*

Háromszög értelmezése: egy szakasz végpontjait összekötjük a szakaszt tartalmazó egyenesre nem illeszkedő ponttal.

Gúla értelmezése: kössük össze egy sokszög minden határpontját egy, a sokszög síkjára nem illeszkedő ponttal! (Természetesen mindkét esetben a kiindulási alakzat is hozzátartozik az értelmezett alakzathoz.)

4. *Paralelogramma — hasáb.*

Paralelogramma: egy szakaszt vele nem párhuzamos irányban eltolva, majd a végpontokat a megfelelő képpontokkal összekötve paralelogrammát kapunk. (A szakasz képe is hozzátartozik az alakzathoz.)

Ha egy sokszöget a síkjával nem párhuzamos irányban eltolunk, majd a határpontokat a képpontokkal összekötjük és a sokszög képét is figyelembe vesszük, hasábot kapunk.

5. Szögfelező egyenes — szögfelező sík.

6. Kör — gömb.

7. Kör — henger.

Henger: a térben adott egyenestől adott távolságra levő egyenesek halmaza.

Analóg alakzatokra vonatkozó tételek

Az analóg tételpárokat azonos számmal jelöltük, a csillagos jelölés a megfelelő analóg tételt jelenti.

1. A háromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra bocsátott merőlegesek egy pontban metszik egymást.

1*. A tetraéder csúcsaiból az átelles lapokra bocsátott merőlegesek egy pontban metszik egymást. (Ez utóbbi állítás csak abban az esetben igaz, ha a tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra.)

1**. A háromszöggel analóg alakzatnak tekinthető a triéder is. Ebben az esetben háromszögcúcsnak triéderél, a háromszög oldalainak egy-egy triéderlap felel meg. Cúcsból az átelles oldalra bocsátott merőlegesnek élt az átelles lapra merőlegesen vetítő síkot feleltetünk meg.

Analóg állítás: A három él vetítősíkja egy egyenesben metszi egymást.

Ez az állítás akkor igaz, ha nincs a triédernek az átelles síkra merőleges éle, különben hamis.

2. Sinustétel általános háromszögben.

2*. Sinustétel a triéderben, ahol az a , b , c élek mellett levő lapszögek rendre: α , β , γ :

$$\sin(bc) : \sin(ca) : \sin(ab) = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

3. Paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegeivel.

3*. Paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege megegyezik az élek négyzetösszegeivel.

4. Érintőnéyszögek tétele.

4*. Húrnégyszögek tétele. (Megjegyzés: az analógia észrevétele miatt előnyösebb a tétel átfogalmazása: Minden húrnégyszögben két szemközti szög összege megegyezik a másik két szemközti szög összegével.)

5. Adott átlójú téglalapok között legnagyobb területű a négyzet.

5*. Adott testátlójú téglatestek között legnagyobb térfogatú a kocka.

6. Szögfelezőtétel a háromszögben.

6*. Szögfelezőtétel a tetraéderben.

7. Thalesz tétele. (Átfogalmazás: a sík két adott pontjára illeszkedő, egymásra merőleges egyenesek metszéspontjainak halmaza egy kör, amelynek átmérője az adott pontok által meghatározott szakasz.)

7*. Tekintsünk a térben két párhuzamos egyenest! Ezekre az egyenesekre illeszkedő, egymásra merőleges síkok metszésvonalainak halmaza henger, amelynek tengelymetszete az adott két párhuzamos egyenes által alkotott sáv.

Az analógia mindenkor a matematikai felfedezések termékeny, heurisztikus erőforrása volt. Az analógia észrevétele mind a kutatómunka, mind az *emlékezet* hasznos eszköze. Gyakran utólagos az analógia észrevétele, ámde ekkor is az ismeretelmélyítést és az emlékezetet szolgálja.

A tartós emlékezetet erősíti, ha például az aritmetikai műveletek tanításakor rámutatunk az analógiára, kiemelve persze azokat az eseteket, amikor hamis az analógiás következtetés eredménye. Megjegyezzük még, hogy például a számtani sorozat ismeretében a mértani sorozat tanításakor építeni kell a kétfajta sorozat közötti analógiára.

Hamis analógiák

Az analógiás következtetéssel nyert sejtést minden esetben követnie kell a bizonyításnak. Gyakori tapasztalat, hogy tanulóinkban a hamis — analógiás következtetéssel nyert — állítás rögződik. Néhány példa az iskolai oktatási gyakorlatból:

1. Az összeadás és szorzás néhány közös tulajdonsága alapján csak az egyikre jellemző tulajdonság közösként kezelése:

Igaz	Hamis
$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c},$	$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c},$
$\sqrt{a^2b^2} = a b ,$	$\sqrt{a^2+b^2} = a + b .$

2. $ab = ba, \quad a^b = b^a,$
 $ab = ba, \quad \log(ab) = \log a \cdot \log b.$

3. A hárommal és kilenccel való oszthatósági szabály kiterjesztése 27-tel való oszthatóságra.

4. Abból a tényből, hogy ha egy téglalap egyik oldalát kétszeresére növeljük, a másik oldalát pedig felére csökkentjük, a téglalap területe nem változik, gyakran tapasztaljuk az analóg állítást abban az esetben, hogy ha az egyik oldalt 20%-ával növeljük, a másikat ugyanakkor annak 20%-ával csökkentjük, holott ebben az esetben a terület változik.

5. *Sík- és térgeometria* tanítása során előfordul hamis analógiák:

- a) A térben egy egyenes adott pontjában az adott egyenesre egyetlen merőleges egyenes állítható.
- b) A térben egy adott síkra a síkra nem illeszkedő ponton keresztül egyetlen merőleges sík állítható.
- c) A térben két, ugyanarra a harmadik egyenesre merőleges egyenes párhuzamos egymással.
- d) A térben egy adott síkra merőleges két sík párhuzamos egymással.
- e) Tetraéder magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

- f) BOLYAI FARKAS átdarabolási tételének térbeli analógiája. (MAX DEHN igazolta, hogy két egybevágó szabályos tetraédernek valamelyik egybevágó lapjuk mentén való összeillesztésével kapott test nem darabolható át vele egyenlő térfogatú szabályos tetraéderbe.)

6. VÉGESBEN alkalmazható eljárások analóg átvitele VÉGTELENRE

- a) Tekintsük az $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ összeget! Alkalmazzuk:

1. a különbség összeadására vonatkozó tulajdonságot:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0;$$

2. a különbség kivonására vonatkozó szabályt:

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1;$$

3. az összeg asszociatív tulajdonságát:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S, \quad S = \frac{1}{2}.$$

- b) Tekintsük a következő törtkifejezést:

$$T = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}.$$

1. Egyik típushiba: a nevező minden tényezőjével egyszerűsít a tanuló és a $T = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots$ kifejezést kapja, amelynek határértéke végtelen.
2. Másik lehetséges hibás „egyszerűsítés”: a számláló minden tényezőjével egyszerűsítve a nevezőben olyan szorzat keletkezik, amelynek minden tényezője

2. A $T = \frac{1}{2^n}$ kifejezés határértéke a végtelenben 0.

Megjegyezzük, hogy e feladat jó motiváló hatású a határérték tanításának bevezetésekor.

Végezetül — a matematikát tanító tanárok számára figyelmeztetőül — idézzük KÁRTESZI professzor ide vonatkozó szavait:

„Nekem — bár szeretem az analógiára épülő munkaprogramot, — mindig az ismert intelem jut vele kapcsolatban az eszembe: NE ADJ GYUFÁT A GYEREK KEZÉBE, MERT Ő MÉG NEM TUDJA, HOGY MILYEN VESZÉLYES!”

A neves, tapasztalt metodikus szakember szavai az alaposan átgondolt, a tanulók életkori sajátosságait, fejlődési fokát figyelembe vevő alkalmazásra intenek.

III. ÁLTALÁNOSÍTÁS

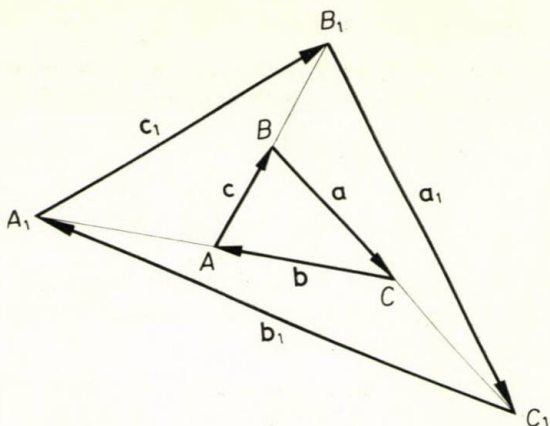
„Van rá eset, hogy könnyebb és előnyösebb egy tétel általánosítását bizonyítani, mint az eredetit.”

(Kürschák József)

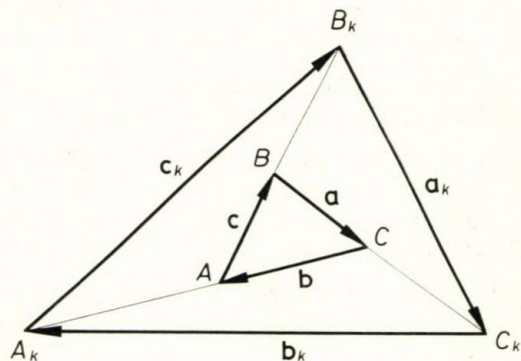
Az általánosítás olyan gondolkodási eljárás, amely átvezet egy szűkebb osztályról egy, az előzőt magában foglaló tágabb osztályra. Szoros kapcsolat van az általánosítás és az analógia között. Amikor egy tételt általánosítunk, egy szűkebb osztály elemeire vonatkozó összefüggést analógiás következtetéssel átviszünk az ezen osztályt tartalmazó tágabb osztály elemeire. Tágabb osztályhoz jutunk például akkor, ha a tétel feltételeit gyengítjük. (Például: háromszögekre vonatkozó tétel n oldalú sokszögre való általánosítása esetén a háromszög feltétel helyett a gyengébb feltételt: n oldalú sokszöget vizsgáljuk.)

Az alábbiakban egy konkrét példa kapcsán mutatjuk be — oktatási gyakorlatban is realizálható — általánosítási irányokat, lehetőségeket.

Tétel: Tekintsük az ABC háromszög $\mathbf{a} = \vec{BC}$, $\mathbf{b} = \vec{CA}$ és $\mathbf{c} = \vec{AB}$ oldalvektorait! Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög oldalait úgy, hogy $\vec{BC_1} = 2\mathbf{a}$, $\vec{CA_1} = 2\mathbf{b}$ és $\vec{AB_1} = 2\mathbf{c}$ teljesüljön! Állítás: az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak négyzetösszege hét-szer akkora, mint az ABC háromszög oldalainak négyzetösszege.



I. általánosítás. A tételben használt eljárást az $A_1B_1C_1$ háromszögre alkalmazzuk. Ha ennek a háromszögnek oldalait hosszabbítjuk meg kétszeresükre, az így nyert $A_2B_2C_2$ háromszög oldalainak négyzetösszege az eredeti háromszög oldalai négyzetösszegének negyvenkilenceszerese lesz.



II. általánosítás. A kiindulási háromszög oldalait úgy hosszabbítjuk meg, hogy $\vec{BC_k} = k\mathbf{a}$, $\vec{CA_k} = k\mathbf{b}$ és $\vec{AB_k} = k\mathbf{c}$ teljesüljön. ($k \in \mathbb{R}^+$.) E tétel bizonyítását közöljük.

A tétel feltételeiből következik: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ebből a skaláris szorzat tulajdonságainak felhasználásával kapjuk: $a^2 + b^2 + c^2 = -2(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{c}\mathbf{a})$.

Ábránkról leolvasható: $\mathbf{b}_k = \vec{C_k A_k} = -(k-1)\mathbf{a} + k\mathbf{b}$,

$$\mathbf{c}_k = \vec{A_k B_k} = -(k-1)\mathbf{b} + k\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a}_k = \vec{B_k C_k} = -(k-1)\mathbf{c} + k\mathbf{a},$$

$$\begin{aligned} a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 &= (k^2 + (k-1)^2)(a^2 + b^2 + c^2) - 2k(k-1)(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{c}\mathbf{a}) = \\ &= (3k^2 - 3k + 1)(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

$k=2$ helyettesítéssel adódik kiindulási tételünk állítása.

III. általánosítás. Kiindulási alakzatként n oldalú sokszöget választva, analóg tétel érvényes.

IV. általánosítási lehetőség. Tekintsünk a térben egy $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokból álló rendszert és kössük össze a pontokat megfelelő sorrendben! Ebből a rendszerből a bevezető tételben vázolt eljáráshoz hasonlóan áttérünk az $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ térbeli sokszögre. A kiindulási tétel érvényes ebben az esetben is.

Kíváncsi, hogy az iskolai matematikaoktatási gyakorlatban — ahol reális lehetőség kínálkozik — fény derüljön a megfelelő tételek általános-speciális viszonyára.

1. Két tag négyzetére vonatkozó szabály n tagra való kiterjesztése:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n a_i a_j.$$

2. Pitagorasz tételének egyik lehetséges általánosítása a cosinus-tétel. Másik lehetőség: a derékszögű háromszögek befogóira és átfogójára rajzolt hasonló alakzatokra való kiterjesztés.

3. Thalesz-tétel általánosítása a kerületi és középponti szögek tétele. Az általánosítás előtt át kell fogalmaztatni a tételt a következő módon: „Bármely kör tetszőleges átmérőjéhez tartozó középponti szög kétszerese az átmérőhöz tartozó kerületi szögnek.” Ezután az „átmérőhöz tartozó” feltételt „ugyanahhoz vagy ugyanakkora húr-hoz tartozó” feltételre gyengítjük.

4. Rolle tételének általánosítása a differenciálszámítás középérték-tétele. A kiinduló tételből az $f(a)=f(b)$ feltételt elhagyva kapjuk az általánosabb tételt.

5. A kilenccel és hárommal való oszthatósági szabály általánosítása az a alapú számrendszerben $(a-1)$ -gyel és ennek osztóival való oszthatóságra.

Didaktikai szempontból fontos, hogy a tanulók lássanak olyan tanulságos általánosításokat, amelyek hamis állításhoz vezetnek:

1. Kölcsönösen egymásba írható háromszögek, négyszögek nem léteznek. Egy-másba írható ötszögek viszont léteznek. (Lásd Kárteszi Ferenc: A geometriatanítás korszerűsítéséről című művében!)

2. Ismert matematikátörténeti tény: Abból, hogy elsőfokú, másodfokú, harmad-fokú és negyedfokú egyismeretlenes egyenlet esetén létezik megoldóképlet, sokáig úgy hitték, hogy létezik megoldóképlet magasabb fokú egyenletekre is.

3. Tanulságos megemlíteni a Fermat-féle sejtést, nevezetesen: az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek $n > 2$ egész kitevő esetén nem létezik 0-tól különböző egész megoldása x -re, y -ra és z -re. E példa azért érdekes, mert még eldöntetlen probléma, hogy az általánosítás igaz vagy hamis állításhoz vezet.

Egy érdekes tétel

Kárteszi professzor tétele: A szabályos hétszög rövid átlói határolta hétszög hosszú átlói ugyanazt a hétszöget határolják, mint az eredeti hétszög hosszú átlóival határolt hétszögnek a rövid átlói.

Általánosítás. Legyen A egy szabályos $2m+1=n$ oldalú sokszög! Tekintsük az átlókat hosszúságuk növekvő sorrendjében és nevezzük őket rendre első, második, ..., $(m-1)$ -edik húrnak, továbbá a k -adik húrokkal határolt sokszöget k -adik övnek! A teljesség kedvéért az A sokszög oldalait 0-adik húrnak, magát az A idomot 0-adik övnek mondjuk. E célszerű elnevezések sugalmazzák a tétel általánosítását:

A j -edik öv k -adik húrjai ugyanazt a szabályos n -szöget határolják, mint a k -adik öv j -edik húrjai. ($j, k = 1, 2, \dots, m-1$.)

Thalesz-tétel átfogalmazása: Ha az A és B pontok egy kör tetszőleges átmérőjének végpontjai, és C a kör egy további tetszőleges pontja, akkor az ABC háromszög α , β , γ szögeire teljesül:

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Analóg tétel érvényes a gömbfelületen és a hiperbolikus síkon is. A tétel érvényes az állandó görbületű síkon, s mivel az euklideszi sík az állandó görbületű síkok részének tekinthető, így ez esetben a tétel általánosításáról beszélhetünk. Hasonlóan teljesül a szögfelező és a szakaszfelező merőleges tétele is.

IV. INDUKCIÓ

„... a matematika alkotás közben kísérleti, induktív tudomány.”

(Pólya György)

A logikában indukciónak nevezzük azt a következtetési módot, amelynek segítségével valamely osztályon belül az egyes esetekből az általánosra következtetünk. Az induktív következtetésekben az egyes esetek felsorolása sohasem teljes, mert éppen azáltal vezet új eredményre, hogy az adott osztály megvizsgált elemei alapján (számolás, mérés, szerkesztés, mozgás) szerzett ismereteket kiterjeszti a szóban forgó osztály meg nem vizsgált elemeinek mindegyikére.

PÓLYA GYÖRGY szerint az indukció olyan módszer, amellyel megfigyelés és egyes esetek kombinációja útján általános törvényeket fedezhetünk fel. Az indukció szabályszerűséget és összefüggést akar felfedezni a megfigyelések mögött. Legfontosabb segédeszközei az általánosítás, specializálás és az analógia.

Általánosítani azért próbálunk, hogy megértsük az észlelt tényeket. Az általánosítás analógiára támaszkodik, próbái a további speciális esetek. [5]

Pólya György a teljes indukcióval kapcsolatban megjegyzi [5], hogy szerencsétlen dolog az „indukció” és „teljes indukció” elnevezések kapcsolódása, mert a kétféle logikai módszer között nagyon csekély a kapcsolat. Gyakorlati kapcsolat van közöttük, mert sokszor egy összefüggés megsejtése induktív módon történik, míg az igazolása a teljes indukció

módszerével. Megjegyezzük, hogy a matematikai szakirodalomban, de a matematikai tankönyvekben is egyre jobban terjed a „teljes indukció” elnevezés helyett a „matematikai indukció” elnevezés. Az átmeneti állapotot jól jellemzi például a magyar gimnáziumi fakultatív B. matematika-tankönyv (III. osztály). „Teljes indukció (Matematikai indukció)” címmel vezeti be a módszert, de a továbbiakban a teljes indukció elnevezést használja. A [12]-vel jelzett módszertani szakkönyv szerzői megkülönböztetik az indukció, a teljes indukció és a matematikai indukció módszerét. *Teljes indukció* módszerén azt a következtetési módot értik, amely az adott szituációban előforduló minden egyes eset, illetve minden egyes rész megvizsgálása alapján mond ki állításokat. Az ily módon nyert állítások — mivel minden egyes eset (rész) megvizsgálásra került — bizonyítottnak tekinthetők. (Ilyen következtetési módot lehet alkalmazni, ha egy véges halmaz elemeire vonatkozó állítás igazságát akarjuk belátni. Ha a megvizsgált halmaz végtelen, de véges sok, egymástól független részre bontható, akkor e részek megvizsgálása is elegendő a teljes halmazra vonatkozó állítás igazolásához. Példa: a kerületi és középponti szögek tételének bizonyítása négy különböző eset megvizsgálásával történhet.)

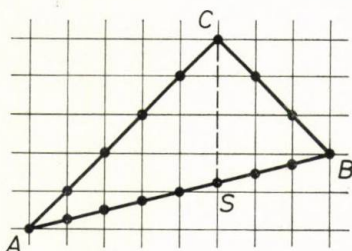
Térjünk vissza kiindulási problémánkhoz, az indukcióhoz! A matematikaoktatási gyakorlatban — főleg az alsóbb osztályokban — gyakran alkalmazott módszer. Persze nem elegendő mértékben.

Esetenként tapasztaljuk, hogy főleg geometriaoktatásunk nem eléggé használja ki a lehetőségeket; mintha túlzottan uralkodna az a szemlélet, hogy a geometria tisztán deduktív tudomány. Az általános iskola osztályaiban feltétlenül szükséges egy sor tétel, összefüggés megsejtetése a megfelelő alakzatokkal történő manipulálás-mérés, számolás, szerkesztés, papírhajtogatás alapján. Igaz, hogy

ez a módszer alkalmazása időigényes, de feltétlenül figyelembe veendő az a pszichológiai tény, hogy 12–13 éves kor előtt az átlagos tanuló nem képes tisztán formális következtetések levonására. Tanulmányosak e szempontból Dusek [3], illetve Z. Krygowska [4] cikkei. Megjegyezzük, hogy az új magyar általános iskolai matematikatanácskönyvekben, -munkalapokban egy sor pozitív példát láthatunk már. (Euler poliéder-tételének „felfedeztetését” szolgálja a 6. osztályos matematikatanácskönyv, Pitagorasz tételének megsejtetését szolgálja a 7. osztályos matematika-munkalapokban található feladatsor).

Példák

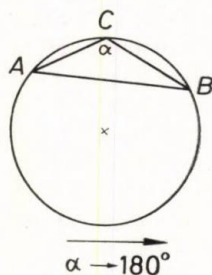
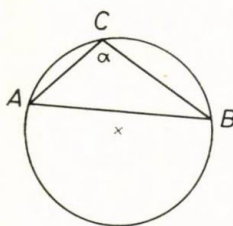
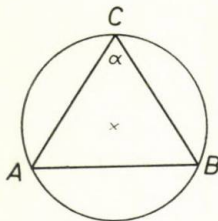
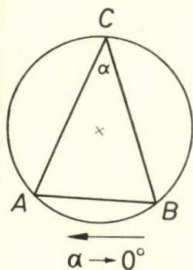
1. Kárteszi professzor sok alkalommal hívta fel a figyelmet a „kockáspapír” használatára. Sok tétel megsejtetésére alkalmas. Mi a háromszögekre vonatkozó szögfelezőtétel egyik lehetséges bevezetését mutatjuk be:



$$|AC| : |BC| = 5 : 3,$$

$$|AS| : |BS| = 5 : 3.$$

2. Thalesz-tétel felfedeztetése applikációs tábla vagy képsorozat segítségével.



A következő kérdések vethetők fel:

- Mit mondhatunk a $\angle BCA$ szögről, ha $|AB|=d$, ahol d a kör átmérőjét jelöli?
- Mit mondhatunk az AB szakaszcól, ha $\alpha=90^\circ$?

3. Aritmetikai tételek megsejtetésére gyakran alkalmas az indukciós módszer használata. Tekintsük a következő feladatsort:

- Két egymást követő természetes szám szorzata osztható 2-vel.
- Három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal.
- Négy egymást követő természetes szám szorzata osztható 24-gyel.

Sejtés: Egymást követő n természetes szám szorzata osztható n faktoriállal. (Ez az állítás matematikai indukcióval bizonyítható.)

4. Sorozatokkal kapcsolatos tételek.

5. Bizonyos tulajdonságoknak eleget tevő ponthalmazok keresésekor először néhány — a feltételeknek eleget tevő — pontot szerkesztünk meg, s ezek alapján próbálunk következtetéseket levonni a keresett alakzat minőségére (ponthalmazok, analitikus geometria).

Az oktatás során feltétlenül kell olyan példát is vizsgáltatni a tanulókkal, amikor az *induktív következtetés hamis sejtéshez vezet*. Az n^2+n+11 kifejezés $n=0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9$ esetén prímszámot ad, de $n=10$ esetén már összetett számot kapunk. A tanulók jelentős része négy-öt konkrét szám esetén már általános érvényű következtetést von le, s gyakran nem is igényli az igazolást. Az ellenpélda meggyőzőheti őket a bizonyítás fontosságáról, az induktív következtetési mód segítségével nyert állítás ellenőrzésének szükségességéről. (Meggjegyezzük még, hogy az idézett példa helyett gyakran az n^2+n+41 kifejezést használjuk az oktatási gyakorlatban. Általánosan is igaz, hogy az n^2+n+p kifejezés (p prímszám) $n=p-1$ esetén mindig összetett számot ad.)

IRODALOM

- [1] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. I.* Springer, Berlin, 1924.
- [2] *Zum logischen Denken im Mathematikunterricht.* Volk und Wissen, Berlin, 1975.
- [3] Dusek, F.: *Zur Methodik des Beweisens.* Mathematik in der Schule, 1968/8.
- [4] Z. Krygowska: *A geometria tanításának néhány kérdése.* Matematikai Lapok, XVI/3—4.
- [5] Pólya György: *A gondolkodás iskolája.* Gondolat, 1977.
- [6] Kárteszi Ferenc: *Szemléletes Geometria.* Gondolat, 1966.
- [7] Klaus G., Buhr M.: *Philosophisches Wörterbuch.* Leipzig.
- [8] Kárteszi Ferenc *szemináriumai, előadásai.*
- [9] Kárteszi Ferenc: *A geometriatanítás korszerűsítéséről.* Tankönyvkiadó, 1974.
- [10] *Pedagógiai Lexikon.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [11] Káli Ferenc: *A szabályos és a derékszögű háromszögeknek megfelelő tetraéderekről.* A Matematika Tanítása, 1979/6.
- [12] *Metodika prepodavanyija matematiki.* Moszkva, Proszvescsenyije, 1975.
- [13] M. Erdnyijew: *Übungsformen im Mathematikunterricht.* Volk und Wissen, Berlin, 1977.
- [14] Dr. Horváth Jenő: *A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában.* A Matematika Tanítása 1980/6, 1981/2.
- [15] Dr. Horváth Jenő *előadásai, szemináriumai.*

DR. ZERGI ISTVÁN

okl. bányamérnök,
Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
Geodéziai és Bányaméréstani Tanszék

A $2n$ csúcspontú síkbeli sokszögek területének egy nevezetes tulajdonsága

Jelölje rendre $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ ($n \geq 2$) egy síkbeli sokszög egymás után következő csúcsait!

Bebizonyítjuk, hogy ha az $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ síkbeli sokszög páratlan indexű csúcsait $\mathbf{p}$ vektorral, a páros indexűeket $\mathbf{q}$ vektorral eltoljuk ($\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ külön-külön tetszőleges), akkor a $2n$ csúcspontú sokszög területe változatlan marad (1. ábra).

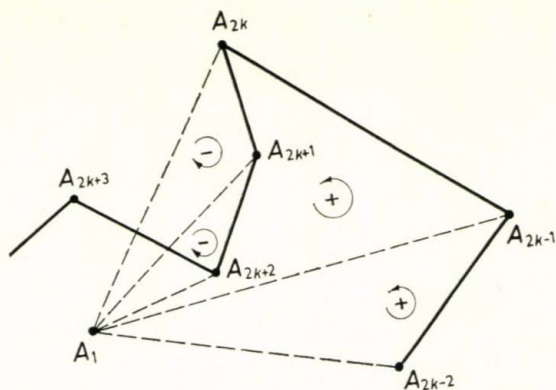
Végezzük el a bizonyítást először konvex esetre!

A 2. ábrán megrajzolt síkbeli sokszög csúcsait A_1 -gyel, A_2 -vel, ..., A_{2n} -nel jelöljük.

tehát a csúcspontokat ismét $\mathbf{p}$, illetve $\mathbf{q}$ vektorral eltolva

$$\begin{aligned} 2\mathbf{t}'_A &= [(\mathbf{a}_{2n} + \mathbf{q}) - (\mathbf{a}_1 + \mathbf{p})] \times \\ &\times [(\mathbf{a}_{2n+1} + \mathbf{p}) - (\mathbf{a}_1 + \mathbf{p})] = \\ &= [\mathbf{a}_{2n} - \mathbf{a}_1 + \mathbf{q} - \mathbf{p}] \times [\mathbf{a}_{2n+1} - \mathbf{a}_1]. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektor tetszőleges, ezért általában $\mathbf{t}_A \neq \mathbf{t}'_A$. Az eltolások útján kialakult sokszög területe $(2n+1)$ csúcspont esetén csak abban a jól ismert (triviális) esetben lehet egyenlő az eredeti sokszög területével, amikor $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.



3. ábra

FITOS LÁSZLÓ

főiskolai docens,

Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

Az egyenlő oldalú tetraéder érintő gömbjeiről

Az egyenlő oldalú tetraédernek négy külső érintő gömbje van. Ugyanis bármelyik lapjára állítjuk is, teljesül a külső érintő gömb létezésének feltétele, nevezetesen az, hogy bármelyik oldalél hosszából kivonva a vele szemközti alapél hosszát, ugyanakkora maradékot kapunk. (L. Molnár Emil: Matematikai versenyzeladatok gyűjteménye 323. oldal.) Jelen esetben ezek a maradékok nullával egyenlők, mert a szemközti élek egyenlő hosszúak. Belső érintő gömbje azonban nincs az egyenlő oldalú tetraédernek, mert szemközti éleinek összege általában nem egyenlő.

Adva van az egyenlő oldalú tetraéder éleinek hossza: a, b, c , és jelöljük az egyszerűség kedvéért $(a+b+c)$ -t $2s$ -sel. Feladatunk a külső érintő gömbök (amelyek nyilván mind egybevágók egymással) sugarának kiszámítása.

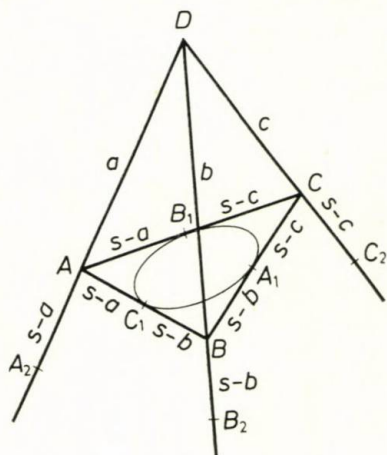
Az 1. ábrán feltüntettük a D csúccsal szemközti laphoz tartozó külső érintő gömbnek az élekkel, illetve azok meghosszabbításával való érintési pontjait ($A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$). A_1, B_1, C_1 megegyezik az ABC lap beírt körének érintési pontjaival. Az is látható, hogy

$$AB_1 = AC_1 = AA_2 = s - a,$$

$$BC_1 = BA_1 = BB_2 = s - b,$$

$$CA_1 = CB_1 = CC_2 = s - c,$$

$$\text{és } DA_2 = DB_2 = DC_2 = s.$$



1. ábra

A külső érintő gömb sugarának a kiszámítására fölhasználjuk azt az egyszerű tényt, hogy a gömb érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és így a gömb középpontja rajta van azon a síkon, amely illeszkedik az érintési pontra és merőleges az érintőre.

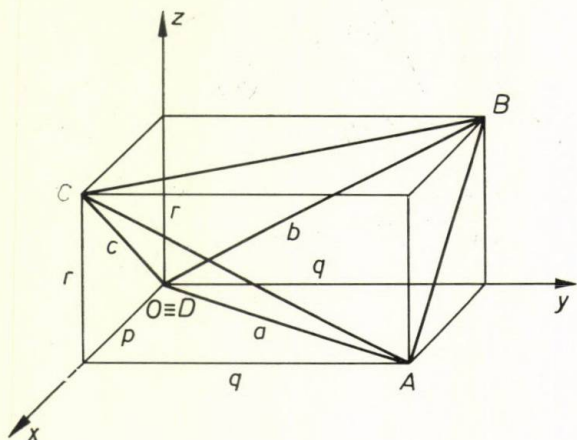
A számítások megkönnyítése érdekében szükségünk van a tetraéder köré írt paralelepipedonra, ami a jelen esetben téglatest, és ezt a téglatestet célszerűen úgy helyezzük el a derékszögű koordináta-rendszerben, ahogy ezt a 2. ábra mutatja.

Ha a téglatest élének hossza p , q , r (ezek a , b , c -ből kiszámíthatók), akkor az OA , OB , OC vektorok koordinátái:

$$\vec{OA} = \mathbf{a}(p; q; 0),$$

$$\vec{OB} = \mathbf{b}(0; q; r), \quad (1)$$

$$\vec{OC} = \mathbf{c}(p; 0; r).$$



2. ábra

Az 1. ábrán láttuk, hogy a D csúccsal szemközti külső érintő gömb a D csúcsból kiinduló élek meghosszabbítását D -től s távolságban érinti, tehát a középpontja a DA_2 -re A_2 -ben, DB_2 -re B_2 -ben és DC_2 -re C_2 -ben merőlegesen állított sík mindegyikén rajta

van, azaz e három sík közös pontja. Célszerű azonban előbb a $D \equiv O$ pontból centrális nyújtással $\frac{1}{s}$ -ed részére kicsinyített gömböt meghatározni, vagyis azt a gömböt, amely az OA , OB , OC félegyeneseket O -tól egységnyi távolságban érinti.

Ennyi előkészítés után most már hozzáfoghatunk a számításokhoz. A vázolt terv szerint előbb egységnyi hosszúvá kell változtatnunk az (1) alatti vektorokat. A kapott egységvektorok:

$$\mathbf{a}^0 = \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}; 0 \right) = \left(\frac{p}{a}; \frac{q}{a}; 0 \right),$$

$$\mathbf{b}^0 = \left(0; \frac{q}{\sqrt{q^2 + r^2}}; \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}} \right) = \left(0; \frac{q}{b}; \frac{r}{b} \right),$$

$$\mathbf{c}^0 = \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2}}; 0; \frac{r}{\sqrt{p^2 + r^2}} \right) = \left(\frac{p}{c}; 0; \frac{r}{c} \right).$$

Ezután mindegyik egységvektor végpontjába rá merőleges síkot kell állítanunk. E síkok egyenlete:

$$\frac{p}{a} \left(x - \frac{p}{a} \right) + \frac{q}{a} \left(y - \frac{q}{a} \right) = 0,$$

$$\frac{q}{b} \left(y - \frac{q}{b} \right) + \frac{r}{b} \left(z - \frac{r}{b} \right) = 0,$$

$$\frac{p}{c} \left(x - \frac{p}{c} \right) + \frac{r}{c} \left(z - \frac{r}{c} \right) = 0.$$

Ha ezeket az egyenleteket egyszerűbb alakra hozzuk, akkor a

$$px + qy = a,$$

$$qy + rz = b,$$

$$rz + px = c$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek megoldása, vagyis a három sík közös pontjának koordinátái:

$$x = \frac{a-b+c}{2p}, \quad y = \frac{a+b-c}{2q}, \quad z = \frac{-a+b+c}{2r},$$

vagy a célszerű $a+b+c=2s$ jelöléssel

$$x = \frac{s-b}{p}, \quad y = \frac{s-c}{q}, \quad z = \frac{s-a}{r}.$$

Eszerint a zsugorított gömb sugara Pitagorasz tételének felhasználásával:

$$\sqrt{\left(\frac{s-b}{p}\right)^2 + \left(\frac{s-c}{q}\right)^2 + \left(\frac{s-a}{r}\right)^2} - 1,$$

amiből a keresett külső érintő gömb sugara

$$R_D = s \sqrt{\left(\frac{s-b}{p}\right)^2 + \left(\frac{s-c}{q}\right)^2 + \left(\frac{s-a}{r}\right)^2} - 1, \quad (2)$$

és középpontjának koordinátái

$$K \left(\frac{s(s-b)}{p}, \frac{s(s-c)}{q}, \frac{s(s-a)}{r} \right).$$

Végül a kapott eredmények ellenőrzéséül számítsuk ki a tetraéder A csúcsából a K középpontú R_D sugarú gömbhöz húzható érintőszakasz hosszát $(e-t)!$ Az előbbieket szerint ennek $s-a$ hosszúságúnak kell lennie.

Pitagorasz tétele alapján

$$\begin{aligned} e^2 &= AK^2 - R^2 = \left(\frac{s(s-b)}{p} - p \right)^2 + \left(\frac{s(s-c)}{q} - q \right)^2 + \left(\frac{s(s-a)}{r} \right)^2 - \\ &- s^2 \left[\left(\frac{s-b}{p} \right)^2 + \left(\frac{s-c}{q} \right)^2 + \left(\frac{s-a}{r} \right)^2 - 1 \right] = p^2 + q^2 + s^2 - 2s(s-b) - 2s(s-c) = \\ &= a^2 + s^2 - 2s(2s-b-c) = s^2 - 2sa + a^2 = (s-a)^2, \end{aligned}$$

és ezért

$$e = s - a,$$

tehát az A csúcsból húzott érintőszakasz hossza valóban $(s-a)$ -val egyenlő.

Kitűzött feladatunkat ezzel megoldottuk. Látjuk, hogy az a, b, c élhosszú egyenlő oldalú tetraéder külső érintő gömbjének sugarát aránylag egyszerű módon a (2) alatti képlettel számíthatjuk ki.

Térbeli homogén pontkoordináták alkalmazása a lineáris geometriában

1. A sík homogén koordinátás egyenlete

Az analitikus geometriában a térbeli homogén koordináták alkalmazása a közönséges (végesben levő) és ideális (végtelen távoli) elemek egyöntetű tárgyalásának biztosításán, egyszerűsítésén kívül megkönnyítheti a síkbeli és térbeli viszonyok egymáshoz természetesen kapcsolódó vizsgálatát is. E cikk írásának célja, hogy az ideális pontok homogén koordinátákkal való jellemzésével síkokra vonatkozó geometriai összefüggések, köztük új eredmények, analitikus kifejtését és bizonyítását adja, s egyidejűleg e koordináták felhasználásának előnyeit is megmutassa.

a) A bevezetésben röviden áttekintjük a térbeli homogén pontkoordinátákra vonatkozó ismereteket, amelyeket a továbbiakban az új anyag tárgyalása során felhasználunk.

Az x, y, z derékszögű koordinátákkal adott közönséges P pont *homogén* derékszögű *pontkoordinátáin* olyan x_1, x_2, x_3, x_4 rendezett számnégycet értünk, amelyre

$$x = x_1 : x_4, \quad y = x_2 : x_4, \quad z = x_3 : x_4. \quad (1)$$

A pont helyzete csak e négy szám arányától függ, az x_1, x_2, x_3, x_4 és $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4$ ($\varrho \neq 0$) számok ugyanazt a pontot jelentik, amelyet röviden $P(x)$ vagy (x) jelöl.

Egy ideális pont meghatározása egyet jelent ama egyenes irányának megadásával, amely e pontot tartalmazza, és fordítva. A kezdőpontot a $P(x, y, z)$ ponttal összekötő egyenes $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ iránycosinusai arányosak az x, y, z koordinátákkal. Ha x_4 fokozatosan 0-hoz tart, miközben x_1, x_2, x_3 rögzített értékek maradnak, akkor a P pont minden határon túl távolodik a kezdőponttól a

$$\cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3 = x : y : z = x_1 : x_2 : x_3$$

egyenletekkel meghatározott irányban. Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ irányszögekkel adott irányt (α) irányú egyenes ideális pontjának homogén koordinátái $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, 0$ ($\varrho \neq 0$), különösképpen pedig

$$x_1, x_2, x_3, 0$$

számnégycet jellemzi, az x_1, x_2, x_3 számok nem mindegyike nulla. Természetesen az (α) irányú egyenes ideális pontjának homogén koordinátái $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, 0$ ($\varrho \neq 0$), különösképpen pedig

$$\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, 0 \quad (2)$$

is. Az ideális pontokra és csak ezekre $x_4 = 0$.

Nincsen olyan pont, amelynek valamennyi homogén koordinátája nulla lenne. Minden megengedett x_1, x_2, x_3, x_4 homogén koordinátánégyes egy közönséges vagy ideális pontot határoz meg, és fordítva, minden közönséges vagy ideális pontnak olyan x_1, x_2, x_3, x_4 homogén koordinátánégyes felel meg, amelynek nem mindegyike nulla.

A közönséges x, y, z koordinátákról a homogénekre áttérés az előbbieknél az $x_1 : x_4, x_2 : x_4, x_3 : x_4$ arányokkal való helyettesítésével történik. A homogénekre áttérésnél az $x_4 = 1$ helyettesítés alkalmazásával az $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ koordináták közvetlenül adódnak.

b) A sík ismert

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

általános egyenlete a homogén koordináták bevezetésével a

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i = 0 \quad (4)$$

egyenletbe megy át, vagyis a bal oldal négyváltozós lineáris alak. Ha félreértés nem származik, az összegezési index el is hagyható. A (3) egyenletet csak a sík közönséges pontjainak koordinátái elégítik ki, a (4) egyenletet a sík összes, mind közönséges, mind ideális pontjainak koordinátái kielégítik. Ez utóbbiak koordinátáira a

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = 0, x_4 = 0$$

egyenletek teljesülnek.

A (4) egyenlet mint különleges esetet magába foglalja az

$$x_4 = 0$$

egyenletet. Ha megállapodunk abban, hogy a (4) egyenlet síkot határoz meg az együttthatók minden értékére, kizárva azt az esetet, amikor az együttthatók mindegyike nulla, akkor síknak kell mondanunk mindazoknak a pontoknak a halmazát is, amelyek kielégítik az $x_4=0$ egyenletet. (Lásd részletesen a 3. fejezet c) pontját!) Ezt az egyenletet a tér összes ideális pontjának és csak ezeknek koordinátái elégítik ki. Ennek az ideális síknak a bevezetésével bármely egyenes ideális pontja mint az ideális síkkal való dőfspontja tekinthető, bármely sík ideális egyenese a síknak az ideális síkkal való metszészvonala. Így pl. az xy -sík ideális egyenesének egyenlete homogén koordinátákban $x_3=0, x_4=0$. A sík és az (x) irányú egyenes párhuzamosságának feltétele azonnal adódik abból, hogy az egyenes akkor és csak akkor párhuzamos a síkkal, ha a $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, 0)$ ideális pontja a síkban van, koordinátái kielégítik a sík egyenletét, vagyis a

$$\sum_{i=1}^3 a_i \cos \alpha_i = 0 \quad (5)$$

egyenlet teljesül.

A következőkben három nem egy egyeneshez illeszkedő ponttal adott sík homogén koordinátás egyenletét és négy pont egy síkhoz illeszkedésének feltételét keressük, különös tekintettel az ideális elemekre történő későbbi kiterjesztésükre.

Adott $(x), (y), (z), (u)$ pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha a

$$\sum a_i x_i = 0, \sum a_i y_i = 0, \sum a_i z_i = 0, \sum a_i u_i = 0$$

négyszeres homogén lineáris egyenletrendszernek van olyan $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ megoldása, amelyben az a_i ismeretlenek mindegyike nem nulla. De a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha együttthatói mátrixának determinánsa nulla. Tehát a sík létezésének szükséges és elégséges feltétele a négy pont homogén koordinátáiból alkotott determináns egyenlősége nullával:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Szavakban kifejezve:

Négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha a homogén koordinátáikból alkotott determináns értéke nulla.

Eszerint egy (x) pont akkor és csak akkor van az $(y), (z), (u)$ pontokkal meghatározott síkban, ha az $(x), (y), (z), (u)$ pontok egy síkhoz illeszkednek. Ennek szükséges és elégséges feltételét a (6) egyenlet fejezi ki. Benne az x_i koordinátákat változóknak tekintve, az $(y), (z), (u)$ pontokkal megadott sík egyenletét nyerjük. Tehát mondhatjuk:

Ha az $(y), (z), (u)$ pontok nincsenek egy egyenesen, akkor az általuk meghatározott sík egyenlete a (6) egyenlet az x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) változókkal.

A sík egyenletéből egyszerű képleteket állíthatunk elő, amelyek a sík bármely pontjának koordinátáit három nem kollineáris pontja koordinátaival fejezik ki. Ha ugyanis az adott három pont nincsen egy egyenesen, a sík egyenlete létezik, vagyis együtthatói, a (6) egyenletben levő determináns utolsó három sora elemeiből alkotott harmadrendű determinánsok nem mindegyike nulla. Ezért a sík tetszőleges pontjának koordinátáira eltűnő (6) alatti determináns első sora a többi háromnak lineáris kombinációja, tehát fennállnak az

$$x_i = c_1 y_i + c_2 z_i + c_3 u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7)$$

összefüggések, amelyekben c_1, c_2, c_3 egyidejűleg nem nulla. Fordítva, a (7) egyenletekből c_1, c_2, c_3 kiiktatásával a (6) egyenlet adódik.

Így jutottunk a következő eredményhez:

Három pontjával meghatározott síkban levő pont koordinátái az adott pontok megfelelő koordinátáinak ugyanazokkal az együtthatókkal képezett lineáris kombinációi, és fordítva, ha egy pont koordinátái nem egy egyenesen levő három pont megfelelő koordinátáinak ugyanazokkal az együtthatókkal képezett lineáris kombinációi, akkor e pont a három ponttal meghatározott síkban van.

2. Három sík, négy sík kölcsönös helyzete

Legyen adott három különböző sík

$$\sum a_i x_i = 0, \quad \sum b_i x_i = 0, \quad \sum c_i x_i = 0$$

homogén koordinátás egyenletével. A síkok egyenleteinek együtthatóiból alkotott mátrix rangja 3 vagy 2. Ha e rangszám 3, akkor a három egyenletből álló, négyismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer egyértelműen meghatározza az ismeretlenek $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ arányát, és fordítva. Mivel pedig az egyenletrendszer megoldásakor homogén koordináták értékeit kapjuk meg és a pont helyzete csak e négy koordináta arányától függ, ezért a koordinátákat ugyanazzal a nullától különböző számmal megszorozhatjuk.

Így a homogén lineáris egyenletrendszer megoldására érvényes tétel szerint az ismeretlenekre közvetlenül az

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}, \quad x_4 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

értékek adódnak.

A megoldás továbbá mutatja: a három sík közös pontja közönséges vagy ideális pont aszerint, hogy az x_1, x_2, x_3 ismeretlenek együtthatóiból x_4 -re felírt determináns

értéke különbözik nullától vagy egyenlő nullával. Az ideális pontokra és csak ezekre teljesül az $x_4=0$ feltétel. A közös közönséges pont létezésének szükséges és elégséges feltétele homogén koordináták nélkül is könnyen kimutatható. Tehát mondhatjuk:

Három síknak akkor és csak akkor van egy közös pontja, ha az egyenleteik együtthatóiból alkotott mátrix rangja 3. A közös pont közönséges vagy ideális pont aszerint, hogy az első három ismeretlen együtthatóiból képezett mátrix determinánsának értéke különbözik nullától vagy egyenlő nullával.

Ha a három egyenlet együtthatói mátrixának rangja 2, akkor az egyenletek közül kettő lineárisan független, a harmadik ezektől lineárisan függ. A két lineárisan független egyenlet minden megoldása kielégíti a harmadik egyenletet is. Mindazok a pontok, amelyeknek koordinátáira a rendszer két egyenlete teljesül, egy egyenest határoznak meg, s ezt tehát a harmadik sík is tartalmazza. A végzett megfontolás nyilván megfordítható.

A három sík közös egyenese közönséges vagy ideális egyenes aszerint, hogy az első három ismeretlen együtthatóiból képezett mátrix determinánsának rangja 2 vagy 1. Ugyanis közös ideális egyenes esetén a három sík párhuzamos, ezért az x_1, x_2, x_3 vagy közönséges koordinátákban x, y, z együtthatóinak aránya a három egyenletben megegyezik. A síksort mint közös közönséges vagy ideális egyenesre illeszkedő síkok összességét tekinthetjük. Tehát állíthatjuk:

Három egymástól különböző síknak akkor és csak akkor van egy közös egyenese, ha az egyenleteik együtthatóiból alkotott mátrix rangja 2. A közös egyenes közönséges vagy ideális, ha az első három ismeretlen együtthatóiból alkotott mátrix determinánsának rangja 2 vagy 1.

Ezek után adott négy sík

$$\sum a_i x_i = 0, \sum b_i x_i = 0, \sum c_i x_i = 0, \sum d_i x_i = 0$$

homogén koordinátás egyenletével. A négy egyenletből álló, négyismeretlenes homogén lineáris rendszer nem triviális megoldása létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a rendszer együtthatói mátrixának determinánsa nulla legyen. Mondhatjuk ezért:

Négy síknak akkor és csak akkor van legalább egy közös pontja, ha az egyenleteik együtthatóiból képezett mátrix determinánsának értéke egyenlő nullával.

Részletesebben kifejtve:

Ha a rendszer együtthatói mátrixának rangja 3, akkor egy egyenlet lineáris kombinációja a többieknek, amelyeknek együtthatóiból nullától különböző harmadrendű determináns alkotható. Az előzőek szerint tehát csak egy közös pont létezik, amely ideális pont, ha az említett három egyenlet első három ismeretlenének együtthatóiból képezett mátrix determinánsának értéke nulla.

Ha a rendszer együtthatói mátrixának rangja 2, akkor a két lineárisan független egyenletnek lineáris kombinációja a másik egyenletpár. Az első két egyenlet által meghatározott közönséges vagy ideális egyenest az utóbbi két sík is tartalmazza.

Végül megjegyezzük, hogy ha a rendszer együtthatói mátrixának rangja 1, akkor az egyenletek csak egy állandó tényezőben különböznek egymástól, tehát a síkok egybeesnek.

3. Feladatok adott ideális elemekkel. Nevezetes összefüggések

Rátérünk most azoknak a feladatoknak analitikus vizsgálatára, amelyekben a síknak a) egy, b) kettő, c) három ideális pontja adottként szerepel.

a) Legyen az első fejezetben tárgyaltakra utalva az egy síkhoz illeszkedő négy különböző pont közül az egyik az (α) irányú egyenes ideális pontja, vagyis a $(\cos \alpha_1; \cos \alpha_2; \cos \alpha_3; 0)$ pont. Az egyenes párhuzamos az adott $P_1(u), P_2(v), P_3(w)$ pontokon áthaladó síkkal, ezért a feladat tulajdonképpen egy sík és egy irány párhuzamosságának meghatározása, de a megoldás egyidejűleg más összefüggések kimutatására is lehetőséget nyújt. A sík létezéséből kiindulva, a pontok koordinátáinak az 1. fejezet (6) alatti determinánsába helyettesítésével adódik a

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis a

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \cos \alpha_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 & u_4 \\ v_3 & v_1 & v_4 \\ w_3 & w_1 & w_4 \end{vmatrix} \cos \alpha_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix} \cos \alpha_3 = 0 \quad (1)$$

egyenlet, amely a keresett párhuzamosság feltételének kifejezése.

Ha a P_1, P_2, P_3 pontokkal az adott sorrendben meghatározott háromszög előjeles területét a sík irányításának megfelelően t , a háromszög yz -, zx -, xy -koordinátasíkokra eső merőleges vetületeinek előjeles területeit e síkok irányításának megfelelően t_1, t_2, t_3 , a háromszög irányított síkja normálisának irányát pedig (α') jelöli, akkor fennállnak a

$$t_i = t \cos \alpha'_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

összefüggések.

Az (1) egyenletben a homogén koordinátákról a közönségesekre térünk át az 1. fejezet (1) képletei alapján, amelyekben az $x_4=1$ értéket helyettesítjük. Ha a P_i ($i=1, 2, 3$) pont közönséges koordinátái x_i, y_i, z_i , akkor

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cos \alpha_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \cos \alpha_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cos \alpha_3 = 0;$$

de ismeretes, hogy az iránycosinusok tényezőiként rendre a $2t_1, 2t_2, 2t_3$ értékek lépnek fel, ezért tovább a

$$\sum_{i=1}^3 t_i \cos \alpha_i = 0 \quad (2)$$

egyenlethez jutunk.

Három közönséges és egy ideális pont egy síkhoz illeszkedésének feltételezéséből kiindulva, tehát a következő eredményt kaptuk:

Ha az irányított sík P_1, P_2, P_3 pontjaival e sorrendben meghatározott háromszög yz -, zx -, xy -koordinátasíkokra eső merőleges vetületeinek előjeles területei e síkok irányításának megfelelően t_1, t_2, t_3 , és a síkkal párhuzamos egyenes irányszögei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, akkor a vetületek területei és az egyenes megfelelő iránycosinusai szorzatainak összege egyenlő nullával.

Mivel a három pont nincsen egy egyenesen, az általuk meghatározott háromszög t területe különböző nullától, ezért a (2) egyenletből — a t_i és t közötti kapcsolat figyelembevételével — a

$$\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \alpha'_i = 0 \quad (3)$$

összefüggés adódik, amely a síkkal párhuzamos egyenes és a sík normálisa (az (α) és (α') irányú egyenesek) merőlegességének feltételét fejezi ki.

A sík egyenletében a változók együtthatói arányosak a normális iránycosinuszai-
val, ezért a

$$\sum_{i=1}^3 a_i \cos \alpha_i = 0 \quad (4)$$

egyenlet a sík és az egyenes párhuzamosságának feltétele, amint az 1. fejezet (5) összefüggésében is már megállapítottuk.

A nem kollineáris $P_i(x_i; y_i; z_i)$ ($i=1, 2, 3$) pontokkal meghatározott sík közös-
séges koordinátás egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

amely azonnal adódik az 1. fejezet (6) alatti homogén koordinátás alakjából is. A de-
termináns kifejtéséből következik az

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

egyenlet, amelynek abszolút tagja nullával egyenlő, ha a háromszög síkja a kezdő-
ponton halad át, és fordítva, ezért érvényes:

*Három pont akkor és csak akkor van a kezdőponton áthaladó síkban, ha a koordiná-
táiból alkotott determináns értéke nullával egyenlő.*

Jelentse most a kezdőponton áthaladó sík tetszőleges pontja helyvektorának irá-
nyát (α) és az előző feladatban használt jelölést alkalmazva, a vetületi háromszögek
előjeles területét t_1, t_2, t_3 . Mivel a pont koordinátái arányosak helyvektorának
iránycosinusaival, ezért az (5) egyenlet a

$$\sum_{i=1}^3 t_i \cos \alpha_i = 0$$

alakot ölti, amely a (2) egyenletre emlékeztet. Az előző feladat tetszőleges helyzetű
síkját most a kezdőponton áthaladó sík váltja fel, a síkkal párhuzamos (a síkhoz
illeszkedő) egyenes helyébe pedig a sík helyvektora lép.

Ezek után összefüggést keresünk tetraéderek előjeles térfogata között.

Az (5) egyenlet első tagja írható a következőképpen:

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Azonban a negyedrendű determináns annak a tetraédernek előjeles hatszoros térfogatát jelenti, amelynek csúcsai rendre az adott háromszög csúcsainak merőleges vetületei az yz -síkra, negyedik csúcsa pedig az adott sík $(x; y; z)$ pontja. Ha e térfogatot V_1 -gyel jelöljük, az első tag értéke $-6V_1$.

A második, illetve harmadik tag átalakítható így:

$$y \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & 0 & z_1 & 1 \\ x_2 & 0 & z_2 & 1 \\ x_3 & 0 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}, \quad z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

A negyedrendű determinánsok egy-egy tetraéder előjeles hatszoros térfogatát jelentik, amelyeknek csúcsai rendre az adott háromszög csúcsainak merőleges vetületei az xz -, illetve az xy -síkra, negyedik közös csúcsuk az adott sík említett $(x; y; z)$ pontja. Ha e térfogatokat V_2 , illetve V_3 jelöli, a második és harmadik tag értéke $-6V_2$, illetve $-6V_3$.

Végül az utolsó tag helyettesíthető a

$$- \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6V$$

értékkel; V annak a tetraédernek előjeles térfogata, amelynek csúcsai az adott három pont, a meghatározott sorrendben, és a kezdőpont. Mindezek figyelembevételével a sík (5) egyenletéből nyerjük, hogy

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ 0 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 0 & z_1 & 1 \\ x_2 & 0 & z_2 & 1 \\ x_3 & 0 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy röviden

$$V_1 + V_2 + V_3 + V = 0. \quad (6)$$

Az eredmény szavakban kifejezve:

Ha az irányított sík P_1, P_2, P_3 pontjaival e sorrendben adott háromszög koordinátasíkokra eső merőleges vetületei azoknak a tetraédereknek egyik lapjául szolgálnak, amelyeknek közös negyedik csúcsuk a háromszög síkjában van, ekkor e tetraéderek,

valamint a P_1, P_2, P_3 pontokkal és a kezdőponttal meghatározott tetraéder előjeles térfogatának összege egyenlő nullával.

Ha három pont összekötő síkja áthalad a kezdőponton, akkor a V térfogat értéke nulla, s az egyenlet a V_1, V_2, V_3 térfogatok összegének eltűnését állítja, azaz

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0. \quad (7)$$

b) Tekintsük ezek után azt az esetet, amikor a négy különböző pont közül kettő ideális. Legyenek e pontok $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, 0)$ és $(\cos \alpha'_1, \cos \alpha'_2, \cos \alpha'_3, 0)$. A négy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy síkhoz, ha a $P_1(x)$ és $P_2(y)$ közös pontokon áthalad olyan S sík, amely az adott két iránnyal párhuzamos. Ennek megfelelően a következő kérdésekre válaszolunk: először keressük az adott két közös pont és két ideális pont egy síkhoz illeszkedésének feltételét; másodszor, ha létezik e sík, írjuk fel homogén koordinátás egyenletét, majd közös pont koordinátáiban normálegyenletét.

A sík létezését feltételezve, a pontok koordinátáinak az 1. fejezet (6) alatti determinánsába helyettesítése az

$$\begin{aligned} x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & 0 \\ \cos \alpha'_2 & \cos \alpha'_3 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 & y_4 \\ \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 & 0 \\ \cos \alpha'_3 & \cos \alpha'_1 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & 0 \\ \cos \alpha'_1 & \cos \alpha'_2 & 0 \end{vmatrix} - \\ - x_4 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \alpha'_1 & \cos \alpha'_2 & \cos \alpha'_3 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

vagyis az

$$\begin{aligned} x_1 y_4 (\cos \alpha_2 \cos \alpha'_3 - \cos \alpha_3 \cos \alpha'_2) + x_2 y_4 (\cos \alpha_3 \cos \alpha'_1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha'_3) + \\ + x_3 y_4 (\cos \alpha_1 \cos \alpha'_2 - \cos \alpha_2 \cos \alpha'_1) - x_4 [y_1 (\cos \alpha_2 \cos \alpha'_3 - \cos \alpha_3 \cos \alpha'_2) + \\ + y_2 (\cos \alpha_3 \cos \alpha'_1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha'_3) + y_3 (\cos \alpha_1 \cos \alpha'_2 - \cos \alpha_2 \cos \alpha'_1)] = 0 \end{aligned}$$

egyenlethez vezet.

Azonban ismeretes, hogy az egymással φ szöget bezáró $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ irányokra merőleges (α, β, γ) irányra érvényes:

$$\cos \alpha = \pm (\cos \alpha_2 \cos \alpha'_3 - \cos \alpha_3 \cos \alpha'_2) : \sin \varphi,$$

$$\cos \beta = \pm (\cos \alpha_3 \cos \alpha'_1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha'_3) : \sin \varphi,$$

$$\cos \gamma = \pm (\cos \alpha_1 \cos \alpha'_2 - \cos \alpha_2 \cos \alpha'_1) : \sin \varphi$$

mindig azonos előjellel. Az előjelet ebben a sorrendben vett irányokra merőlegesnek az irányítása határozza meg. Ezért — az irányítástól függetlenül — az egyenlet így alakul:

$$(x_1 y_4 - x_4 y_1) \cos \alpha \sin \varphi + (x_2 y_4 - x_4 y_2) \cos \beta \sin \varphi + (x_3 y_4 - x_4 y_3) \cos \gamma \sin \varphi = 0.$$

Mivel az adott két irány különböző, ezért $\sin \varphi \neq 0$, tehát így az

$$(x_1 y_4 - x_4 y_1) \cos \alpha + (x_2 y_4 - x_4 y_2) \cos \beta + (x_3 y_4 - x_4 y_3) \cos \gamma = 0 \quad (8)$$

egyenlet adódik. A zárójelben levő kifejezések $x_4 = y_4 = 1$ értékére a P_1 és P_2 pontok

megfelelő közösleges koordinátáinak különbségével egyenlők, vagyis a P_1P_2 egyenes $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ iránycosinusaival arányosak, ezért az egyenletből következik, hogy

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0. \quad (9)$$

A (9) összefüggés az (α, β, γ) és $(\alpha', \beta', \gamma')$ irányok merőlegességének feltétele.

Ezzel bebizonyítottuk a következő állításunkat:

A $P_1(x)$, $P_2(y)$ közösleges pontok és az $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ irányokkal meghatározott ideális pontok egy síkhoz illeszkedésének feltételét a (8) egyenlet fejezi ki, amelyben (α, β, γ) az adott irányokra és egyúttal a P_1P_2 egyenesre merőleges irányt, a sík normálisának irányát jelenti.

Ha a (8) egyenletben az x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátákat változóknak tekintjük, akkor az S sík

$$x_1 y_4 \cos \alpha + x_2 y_4 \cos \beta + x_3 y_4 \cos \gamma - x_4 (y_1 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + y_3 \cos \gamma) = 0 \quad (10)$$

homogén koordinátás egyenletét nyerjük, amelyben az x_1, x_2, x_3 változók együttathatóinak $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ aránya a sík normálisának iránycosinuszainak arányát adja meg.

A sík (10) egyenletéről közvetlenül leolvasható, hogy a sík átmegy az adott irányok ideális pontjain, mert ezek koordinátáinak a sík egyenletébe helyettesítése az irányok bármelyikének és a sík normálisának merőlegességét igazolja.

Ha végül bevezetjük a közösleges koordinátákat, x, y, z a változókat, x_0, y_0, z_0 a P_2 pont koordinátáit jelöli, akkor (10)-ből az

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - (x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma) = 0,$$

vagy

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (11)$$

egyenlethez, a sík közösleges koordinátás normálegyenletéhez jutunk, amelyben a változók együttathatói a sík normálisának iránycosinuszai, az abszolút tag a kezdőpontból a síkra bocsátott merőleges hossza.

A (11) egyenlet azonnal mutatja, hogy a sík az adott két közösleges ponton valóban áthalad.

c) Hátra van még három nem egy síkkal párhuzamos iránnyal adott ideális pontokon áthaladó sík esetének vizsgálata. Emlékeztetünk arra a korábbi megállapodásunkra, hogy az $x_4=0$ egyenlet a tér ideális síkját határozza meg.

Az $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ irányok ideális pontjai $(\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i, 0)$ ($i=1, 2, 3$). Koordinátáiknak az 1. fejezet (6) egyenletébe helyettesítéséből a sík általános egyenletére kapjuk, hogy

$$x_4 \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = x_4 \sin \varphi \cos \vartheta = 0, \quad (12)$$

ahol φ jelenti az első két irány által bezárt szöget, ϑ pedig azt a szöget, amelyet a harmadik irány alkot az első két irány merőlegességével, az irányokat az adott sorrendben véve figyelembe. Az iránycosinuszok determinánsának a felírt szorzattal való egyenlősége következik abból, hogy a tetszőleges **a, b, c** vektorok vegyesszorzata,

vagyis az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

$$abc = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin \varphi \cos \vartheta;$$

ebből egységvektorokra és az $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ irányszögeikre éppen az összefüggés adódik.

Ha $\sin \varphi = 0$, akkor $\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pi$, ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok kollineárisak; ha pedig $\cos \vartheta = 0$, akkor $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$, vagyis a $\mathbf{c}$ vektor merőleges az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok közös merőlegesére, azaz párhuzamos a vektorok síkjával. Tehát mindhárom vektor párhuzamos ugyanazzal a síkkal, azaz komplanáris. De e feltételek az adott irányok esetében nem teljesülnek, ezért a $\sin \varphi \cos \vartheta$ szorzat nem lehet nulla, tehát az

$$x_4 = 0 \quad (13)$$

egyenlet áll fenn, amely így valóban a három nem egy síkkal párhuzamos irány ideális pontjait összekötő síknak egyenlete.

Ha a koordinátatengelyeket tekintjük az adott irányoknak, akkor az iránycosinusok determinánsának értéke 1, tehát az $x_4 = 0$ egyenlet közvetlenül nyerhető.

IRODALOM

- [1] Bydžovský, B.: *Úvod do analytické geometrie*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1956.
- [2] Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [3] Kommerell, K.: *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Koehler & Amelang/Leipzig, 1953.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat 1979-től évenként versenyt rendez a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására. A versenyen részt vehetnek az alsó- és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny feladatmegoldásból áll. A 8—10 feladatot minden év júliusában teszi közzé a Versenybizottság A Matematika Tanítása című folyóiratban. (A versenyfeladatok beszerezhetők még a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, valamint a Társulat központjában és helyi tagozataiban személyesen vagy postán. Az utóbbi esetben kérjük egy megcímezett válaszboríték küldését is.)

A 8—10 feladatot azonos témakörből tűzik ki. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyeknek ismerete igen jól használható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában.

A júliusban kezdődő verseny előtt a Versenybizottság minden évben cikket vagy cikkeket jelentet meg A Matematika Tanítása című folyóiratban; ezzel segítséget kíván nyújtani a versenyfeladatsor megoldásához. Ez a cikk, illetve ezek a cikkek feladatokkal és elméleti összefoglalóval tájékoztatják a versenyen indulni kívánókat az évi témakörökről.

A cikk(ek)ben megjelent feladatok megoldásának beküldését nem kéri a Versenybizottság. A feladatokat és az elméleti anyagot minden év júliusában a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén az érdeklődők a cikk(ek) szerzőinek irányításával szemináriumi formában dolgozzák fel.

A verseny eredményét minden év decemberében hirdetik ki. A Társulat pénzjutalomban részesíti a verseny legeredményesebb résztvevőit.

Matematikai összejövetelek az Egyetemes Eszperantó Kongresszus keretében Budapesten

A világ eszperantistái először 1905-ben, Franciaországban jöttek össze Boulogne-sur-Mer-ben. Akkor a 688 kongresszusi tag között volt *Ludwig Zamenhof* is, az eszperantó nyelv megalkotója. Azóta, — a világháborús éveket leszámítva, — minden évben más-más országban összegyűlnek a nemzetközi nyelv hívei azért, hogy a személyes találkozás révén jobban megismerjék egymás országát és erősítsék barátságukat, terveket szőjenek a jövőendő együttműködésre. 1908 óta, tehát megalakulásától az *Egyetemes Eszperantó Kongresszust* (U. K. = *Universala Kongreso*) az *Egyetemes Eszperantó Szövetség* (U. E. A. = *Universala Esperanto Asocio*) rendezi. Az 1983-as, 68. világkongresszus Budapesten került megrendezésre, a Budapest Sportcsarnokban augusztus 1-től 6-áig. Mindannyiunk nagy öröme, hogy a világ 94 országában nyilvántartott 36 624 eszperantista közül több, mint ötezer vendég érkezett fővárosunkba, így ez volt az eszperantó-történelem eddigi legnépesebb kongresszusa.

A *Nemzetközi Eszperantista Matematikusok Szervezete* (*Internacia Asocio de Esperantistaj Matematikistoj*, rövidítve: *IAdEM*) augusztus 5-én délután 2-kor nyilvános tájékoztatót és ugyanazon a délutánon fél 5-kor közgyűlést rendezett. A kongresszus 130 rendezvényét csak párhuzamosan lehetett lebonyolítani, ezért annak ellenére, hogy a résztvevők között sok számítástechnikust, matematikust és matematikatanárt üdvözölhetünk, az *IAdEM* összejövetelein, a Wüster-teremben az előzőknél kevesebben vettek részt.

Megjelent *Gerard Cool*, svájci gimnáziumi tanár, az *IAdEM* elnöke; *Francois Lo Jacomo*, a párizsi Matematikai Intézet

munkatársa, az *IAdEM* titkára; *Mauro La Torre*, olasz általános iskolai tanár; *Petko Arnaudov*, bolgár gimnáziumi tanár; *Andre Labit*, líceumi tanár Lille-ből (Franciaország); *Wladyslaw Klimek*, *Zygmunt Linke* és *Zbigniew Zak* lengyel matematikusok; *Olaf Reiersøel*, az oslói egyetem tanára; *Sukurov Firdausz* tadzsikisztáni, *G. Goreckaja* szverdlovszki, *Alekszander Sljáfer* tomszki (Szovjetunió) matematikusok; *G. H. Bayerzadeh* iráni matematikus; *Fernand Boyet* középiskolai tanár Angers-ből (Franciaország); *Quyang Wendao*, a Kínai Tudományos Akadémia Automatizálási Intézetének munkatársa; a kanadai *R. Eichhocz* először látogatott el az *IAdEM* budapesti találkozására. Ezzel a találkozóval egyidejűleg rendezték a csillagászok a Planetárium meglátogatását, ahol *dr. Ponori-Thewrewk Aurél* ny. igazgató mutatta be a magyar csillagászoknak ezt a büszkeségét, ezért az U. K. csillagász-résztvevőit nélkülöznünk kellett a matematikus összejövetelről.

Az első rész tájékoztató jellegű volt. *Lo Jacomo*, titkár felsorolta az 1982 decemberi, budapesti INTERKOMPUTO alatt megrendezett összejövetel óta eltelt időszak eseményeit. La Chaux-de-Fonds-ban (Svájc), az eszperantó kastélyban a beérkezett írásbeli vélemények figyelembevételével megtárgyalták *Gerard Cool Geometriai Értelmező Szótárának* egyes még kérdéses elnevezéseit.

A *Matematiko Translimen* (Határokon Túli Matematika) című folyóirat feladatait *Gerard Cool* és *Petko Arnaudov* küldte be megoldva. A megoldások közlése túlságosan sok helyet igényelne a *Matematiko Translimen*-ben, ezért az érdeklődők számára külön sokszorosítják ezeket.

Felvetődött az a gondolat, hogy készítsük el az eszperantó nyelven megjelent matematikai kiadványok bibliográfiáját.

A szünetben a legfrissebb és a régebbi eszperantó nyelvű matematikai kiadványok között a *Matematiko Translimen* legújabb, éppen a kongresszusra elkészült „budapesti” számát is megvásárolhattuk. Ez tartalmazza az 1980. december 28. és 1981. január 2. között megrendezett első budapesti összejövetel anyagát. Teljes terjedelemben közli *Surányi János*, az ELTE tanára: *Geometriai módszerek a számelméletben*; *Petko Arnaudov*, a pazardzsi (Bulgária) matematikai gimnázium tanára: *Tanórán kívüli matematikai tevékenység szervezése*; *Berényi Zsuzsanna Ágnes*, budapesti középiskolai tanár: *A felnőttoktatás különleges sajátosságai*; *Tóth János*, az MTA Számítástechnikai Kutatóintézetének tudományos munkatársa: *A Wiener-féle szűrés elemi tárgyalása*; *J. O. de Kat*, a delfti (Hollandia) Műszaki Egyetem mérnökének: *A sinus- és cosinus-függvény magasabb hatványainak meghatározása fél Pascal-háromszög segítségével*; *Kovács Zoltán*, a Budapesti Tanítóképző Főiskola tanára: *Prímek egymás után és Balogh Viktória*, az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola docense: *A magyarországi matematika-oktatásról* című előadását eszperantó nyelven. Az előadásokon kívül érdekes fejtörő feladatok is olvashatók a lapban. Ezeknek szövege nem-eszperantisták számára is megérthető. A *Matematiko Translimen* az Eszperantó Könyvesboltban kapható. Ennek címe: Budapest VIII., Kenyérmező u. 8.

Az IAdEM évi közgyűlésén a résztvevők szétosztották a feladatokat. Néhány teendő ellátására újabbak jelentkeztek, és munkacsoport alakult azért, hogy *Gerard Cool* alapvető szakkifejezések eszperantó elnevezéseiből álló gyűjteményét véleményezze. Az egybegyűltek elhatározták, hogy a készülő teljes matematikai eszperantó értelmező szótárt témák szerint állítják össze.

A közgyűlés a különféle matematikai kifejezések eszperantó elnevezéseire vonatkozó vitával ért véget. Új könyvek, a terminológiai füzetek sorozatának megjelenését helyezték kilátásba.

Az *Egyetemes Eszperantó Kongresszus* keretében 1983. augusztus 4-én alakult meg a *Tudományos Kiadói Központ Szakkifejezésekkel Foglalkozó Részlege* (Terminologia Sekcio de Science Eldona Centro, vagyis rövidítve: TeS). Az eszperantó nyelvű *Tudományos Kiadói Központ* 1981 óta Budapesten működik. A TeS munkatervében a szakemberek számára szerepel javaslat. (Lásd az 1983/5. számban részletesebben!) Összefoglalja az alapelveket, irányítja a terminológiai munkát, bibliográfiát állít össze a szakszótárakról. A TeS elnöke *dr. Máthé Árpád*, az ELTE kémiai tan székének adjunktusát választották. Nyelvi szakértőként *dr. Wacha Balázst* az MTA Magyar Nyelvtudományi Intézetének munkatársát kérték fel. A TeS „hivatalos” lapja a *Budapesti Tájékoztató* (Budapeŝta Informilo) lett, amelyet szintén *dr. Máthé Árpád* szerkeszt.

A 68. U. K. a Világkommunikációs Év jegyében központi témaként tárgyalta a kommunikáció kérdését. Ennek keretében a számítástechnika kitüntetett szerepet nyert. *A. Sherwood*, az illinoisi (USA) egyetem tanára a *PLATO-rendszerben különböző nyelvű beszéd szintézisről*, *Judy Sherwood* ugyanazon az egyetemen végzett kutatásáról számolt be „*A PLATO-rendszerű beszélő számítógéppel történő nyelvoktatás*” címen. *Heinz-Dieter Maas*, a saarlandi (NSZK) egyetemen végzett kísérletről „*Számítógépes fordítás a SUSY-rendszerrel*” címen és a rotterdami Rendszerfejlesztő Iroda munkatársa, *A. P. Witkam* a *SIMTRAN-rendszer szerint az eszperantónak távolba történő szöveg- és képtovábbításra való felhasználásáról* tartott értékes előadást, nagy érdeklődés közepette. Ezekre a számítástechnikai rendezvényekre 1983. augusztus 8-án, 9-én és 10-én került sor

a Neumann Társaság V., Báthori u. 16. számú helyiségében.

Az Egyetemes Eszperantó Kongresszus színes forgataga 1983. aug. 6-án ért véget a Budapest Sportszarnokban az esz-

perantó himnusz eléneklésével. 1984-ben *Vancouverben* (Kanada) rendezik meg az U. K.-t, és azon belül ismét sor kerül az IAdEM összejövetelére is.

Új könyvek

A felsorolásban nem szerepelnek általános iskolai, középiskolai tankönyvek, egyetemi és főiskolai jegyzetek és egyes intézményeknél saját kiadásban sokszorosított kiadványok.

ANDRÁSFAL BÉLA: *Gráfelmélet, folyamatok, mátrixok*. Budapest, 1983, Akadémiai Kiadó, 263 oldal, 85,— Ft.

BORSODI ISTVÁN—GÖNDÖCS LÁSZLÓ: *Matematika a tanítóképző intézet első évfolyama számára* (Ideiglenes tankönyv), (9. kiadás), Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 355 oldal, 33,— Ft.

BORSODI ISTVÁN—GÖNDÖCS LÁSZLÓ: *Matematika a tanítóképző intézet harmadik évfolyama számára* (Ideiglenes tankönyv), (6. kiadás), Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 335. oldal, 32,— Ft.

DONKA GYÖRGY—HEGEDŰS KÁLMÁNNÉ: *Útmutató a foglalkoztató iskola 7. csoportja Számolás-mérés munkafüzetéhez*. Budapest, 1983, Országos Pedagógiai Intézet, 52 oldal, ár nélkül.

FRESCHL GYÖRGY: *Módszertan és esettanulmányok a regressziószámítás köréből*. Statisztikai módszertani füzetek. Budapest, 1983, Statisztikai Kiadó Vállalat, 61 oldal, ár nélkül.

HACK FRIGYES: *Oktatóprogramok tervezése*. Budapest, 1983, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 73 oldal, ár nélkül.

HAJNAL ANDRÁS—HAMBURGER PÉTER: *Halmazelmélet*. (Egyetemi tankönyv), Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 34,— Ft.

HÁMORI MIKLÓS: *Tanulás és tanítás számítógéppel*. Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 239 oldal, 29,— Ft.

HUHN, A. P. and SCHMIDT, E. T. (editors): *Contributions to lattice theory*. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 33, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1983, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 784 oldal, 690,— Ft.

JAGLOM, I. M.: *Boole-struktúrák és modelljeik*. Budapest, 1983, Műszaki Könyvkiadó, 187 oldal, 32,— Ft.

KÁLOVICS FERENC: *Numerikus módszerek egyenletek, egyenletrendszerek megoldásához*. Miskolc, 1983, Nehézipari Műszaki Egyetem, 68 oldal, ár nélkül.

SEVRIN, L. N.—ZSITOMIRSZKIJ, V. G.: *Pontok, vonalak, idomok. Játék a mértannal* (2. kiadás). Budapest, 1983, Minerva Könyvkiadó, 76 oldal, 44,— Ft.

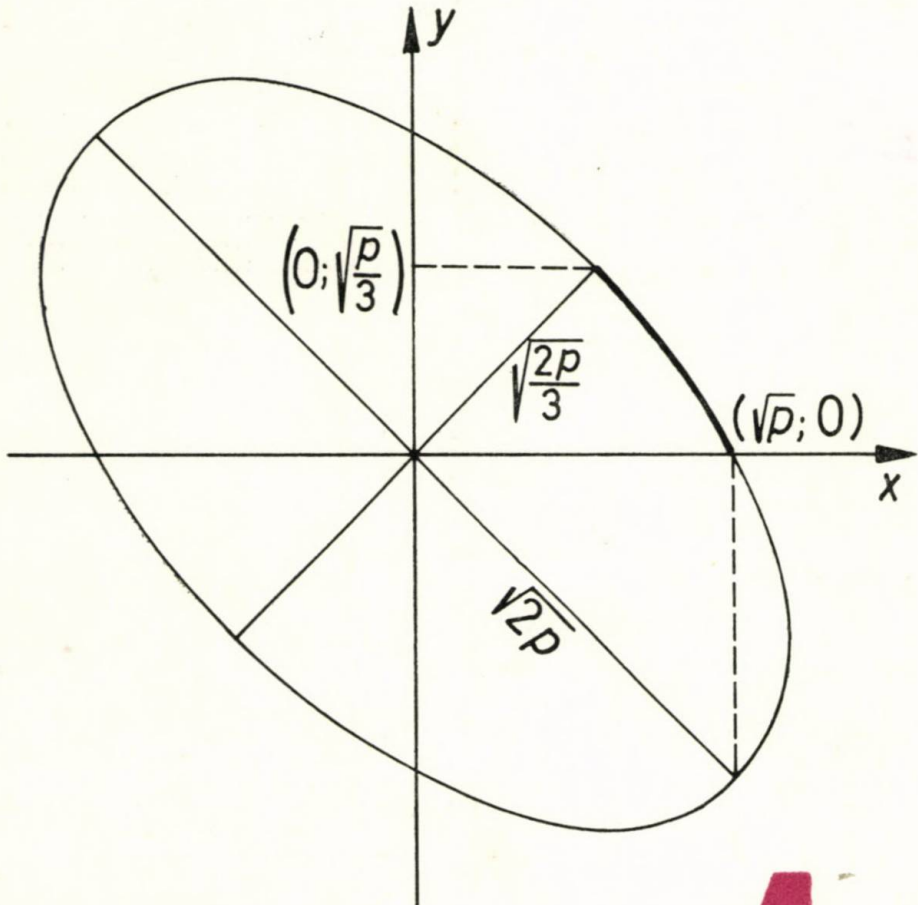
SIMON LÁSZLÓ—BADERKO, F. A.: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*. Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 510 oldal, 55,— Ft.

SZ.-NAGY, B. and SZABADOS, J. (editors): *Functions, series, operators*. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 35, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1983, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, 1307 oldal, 1150,— Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



4

1984. augusztus * XXXI. évfolyam

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁS

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

84-2268 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalvá-
nyon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi
jelzőszámára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66
betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő
adatokat is:

a) személyi számukat, b) asszonyok leánykori
nevüket, c) lakáscímüket — irányítószámmal,
d) foglalkozásukat (beosztásukat), e) munka-
helyük pontos megnevezését, f) munkahelyük
címét — irányítószámmal.

TARTALOM

<i>Dr. Orosz László:</i> Megtanítási program- csomag matematikából; Egyenletek c. téma, általános iskola 8. osztály	97
<i>Dr. Geröcs László:</i> A Pascal-háromszög ál- talanosítása, az általános Pascal-három- szög és a k -ad rendű Fibonacci-sorozat kapcsolata	105
<i>Dr. Böröczky Károly:</i> Néhány feladat az alakatok optimális elrendezéseinek kér- désköréből	113
A Bolyai János Matematikai Társulat verse- nye matematikatanárok számára	116
<i>Szerényi Tibor:</i> Beszámoló a tanárképző főiskolák 1983. évi matematikai tanul- mányi versenyéről I.	117
FELEADATOK	120
Új könyvek	B/IV

INHALT

<i>Dr. Orosz, László:</i> Ein Lehr-Programmpa- ket aus Mathematik; das Thema Gleich- ungen, Grundschule 8. Klasse	97
<i>Dr. Geröcs, László:</i> Die Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks, der Zusam- menhang zwischen dem allgemeinen Pascalschen Dreieck und der Fibonacci- schen Folge k -ter Ordnung	105
<i>Dr. Böröczky, Károly:</i> Einige Aufgaben aus dem Themenkreis der optimalen Anord- nungen der Figuren	113
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathe- matischen Gesellschaft für die Mathema- tiklehrer	116
<i>Szerényi, Tibor:</i> Bericht über den mathema- tischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1983 — I.	117
AUFGABEN	120
Neue Bücher	B/IV

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Д-р Орос Ласло:</i> Программный учебный пакет из математики; тема Уравнения, 8. класс начальной школы	97
<i>Д-р Гереч Ласло:</i> Обобщение треугольни- ка Паскаля, связь между общим тре- угольника Паскаля и прогрессии Фибо- наччи k -го порядка	105
<i>Д-р Бөрөцки Карой:</i> Несколько задач из круга вопросов оптимальных распо- ложений фигур	113
Соревнование математического Общес- тва им. Яноша Бояи для учителей математики	116
<i>Сереньи Тибор:</i> О математическом сорев- новании 1983 г. педагогических инс- титуту I.	117
ЗАДАЧИ	120
Новые книги	B/IV

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. OROSZ LÁSZLÓ

egyetemi adjunktus

Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs

Megtanítási programcsomag matematikából. Egyenletek c. téma, általános iskola 8. osztály

A gyenge, hiányos elsajátításhoz, bizonytalan, részleges tudáshoz vezető hagyományos iskolai oktatás átalakítására világszerte kiterjedt kísérletek folynak. A külföldi törekvések közül az egyik legismertebb a „mastery learning” [3] modellje, Magyarországon pedig a témakompenzációs oktatástól a feladatbankos kompenzáción keresztül a megtanítási stratégiákig vezető kutatási program [9], [10], [11]. Dolgozatunk az utóbbi témakörben készült doktori disszertáció [12] eredményeit foglalja össze.

Kísérletünk közvetlen előzménye egy 1981-ben végzett összefüggés-vizsgálat volt. Arra a kérdésre kerestünk választ, hogy egy adott matematikai témakör el-

sajátítását mennyiben befolyásolja az úgynevezett előfeltétel-tudás, vagyis azok a korábbi ismeretek és készségek, amelyekre az adott téma tanítása során építünk. Az eredmény számunkra mindössze 18%-ban határozza meg az elsajátítás eredményességét ($r^2=0,18 \rightarrow r$, a korrelációs együttható). Ez a matematikai ismeretek szigorúbb egymásra épülését feltételező várákozásainkkal ellentétes eredmény érlelte meg a kísérlet gondolatát.

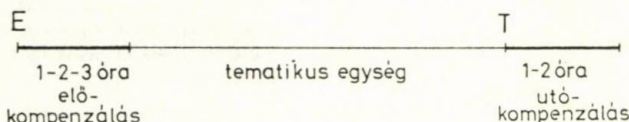
A kísérletre a jelenlegi kutatások szerint két alternatíva kínálkozott egy úgynevezett kritérium-orientált oktatást célzó elképzelésen belül.

Feltételeztük, hogy az elő- és utó-

I. Egyszerű kompenzálas:

kritérium: 70—85 %

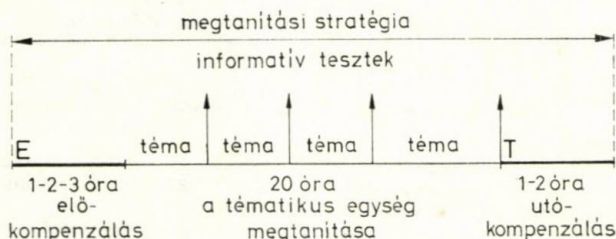
Csak az elő- és utókompenzálást tervezi.



II. Folyamatos kompenzálas:

kritérium: 75—85 %

A tematikus egység megtanítását is tervezi.



kompenzálas mellett a folyamatos kompenzációt (II) is megvalósító megtanítási programcsomag alkalmazásával matematikában is jelentős eredményeket érhetünk el, mégpedig az oktatás viszonylag késői szakaszában (8. osztályban) is.

A kísérleti oktatás céljaira az általános

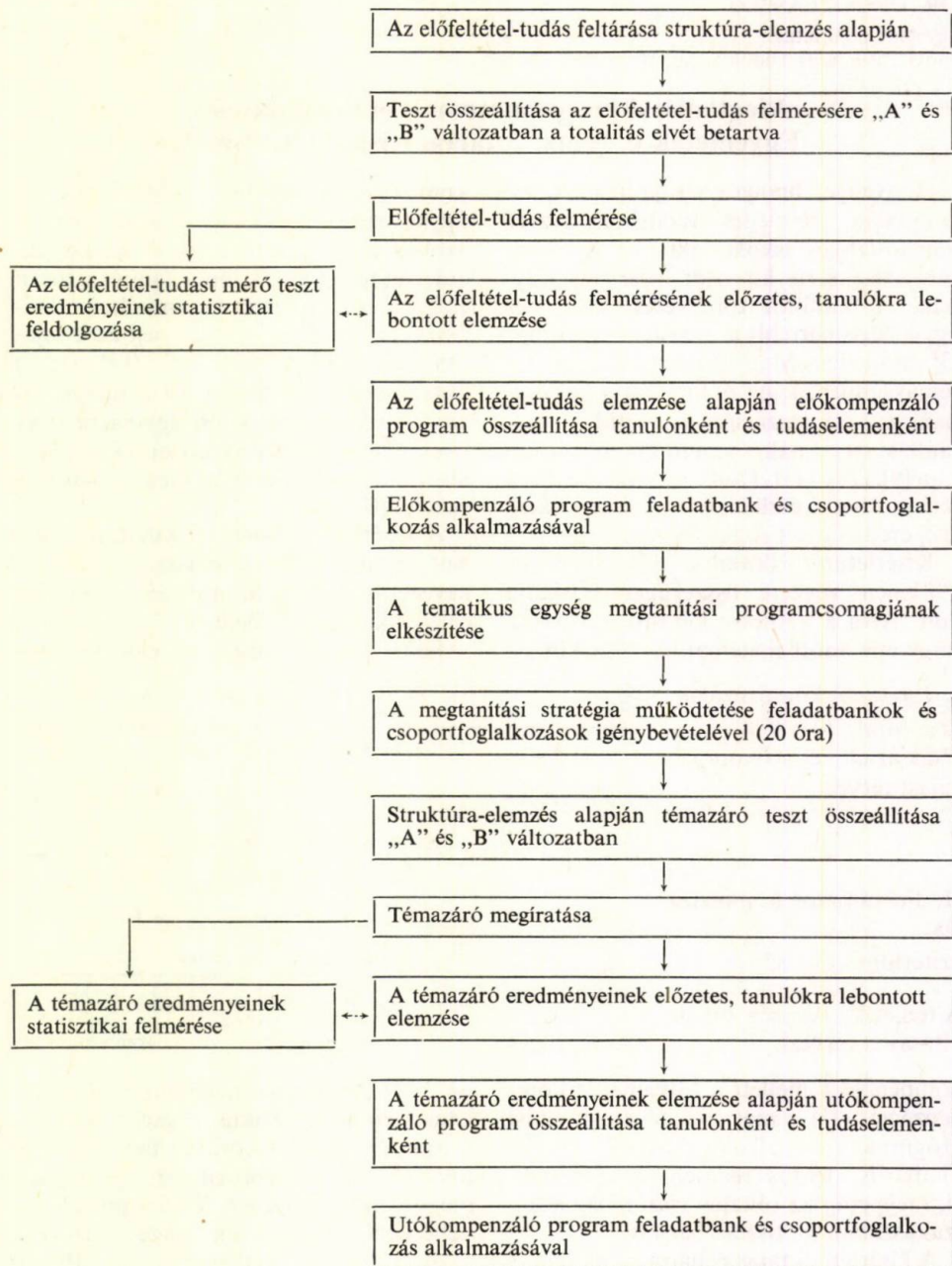
iskolai 8. osztályos matematika „Egyenletek” című tematikus egységét választottuk ki. A téma korábbi tapasztalataink szerint (különösen az egyenlettel megoldandó szöveges feladattípusok) a nehezebb anyagrészek közé tartozik. A vizsgálat szakaszait az alábbi

blokk-sémán foglaltuk össze. A kísérleti oktatást közel egyéves előkészítő munka előzte meg. Ez alatt az idő alatt készítet-

tük el az oktatás során használt eszközöket, lényegében a megtanítási program-csomag tartozékait.

A kísérlet előkészítése

A vizsgálat blokk-sémája



A programcsomag eszköztrendszere

A programcsomag összeállításánál messzemenően törekedtünk a széles körű alkalmazhatóság szempontjainak érvényesítésére. Abból indultunk ki, hogy a programcsomagot pedagógiai kísérletezésben nem járatos pedagógusok fogják használni, ezért az írásos anyagoknak a megtanítási stratégia minden lényeges mozzanatát részletesen ismertetniük kell. Ugyanakkor törekedtünk a kellő rugalmasságra, a konkrét helyzethez, feltételekhez való alkalmazhatóságra és a tanárok módszertani szabadságának és felelősségének megőrzésére is.

A kísérlet megkezdése előtt minden résztvevő pedagógus kézhez kapta a programcsomagot „Forgatókönyv” címen. A „Forgatókönyv” a következő anyagokat tartalmazta:

1. *A kísérletet megelőző tanári teendők.* Itt foglaltuk össze a csoportmunka előkészítésére, a csoportok kialakítására vonatkozó tudnivalókat. Háromféle csoport működését javasoltuk:

a) *Mikrocsoport:* 2 fő; egyik a „tutor”, aki segítséget tud nyújtani társának. Ez kölcsönös kapcsolatot jelent.

b) *Kis csoport:* 5–6 fő; megbízott vezetővel. Heterogén összetételt ajánlottunk.

c) *Differenciált csoportok* (bontás): pl. 3 csoport: *A:* a legfejlettebbek, *B:* közepesen fejlettek, *C:* kevésbé fejlettek (az adott témában!). Ezt a formát az *ismeretszerzés utolsó fázisában* alkalmaztuk (a témazáró teszt előtti utolsó segítségként). A *C* csoporttal közvetlen foglalkozást, az *A–B*-vel közvetett foglalkozást valósítottunk meg.

Ezenkívül még otthoni tanulópárok működését is lehetővé tettük.

2. *Felhívás a szülőkhöz.* A kísérletet ismerteti és a szülők támogatását kéri. Elsősorban a tanulási lehetőség megteremtését és az ellenőrzés biztosítását kértük.

3. *A csoportmunka gyakorlati alkalmazása.* A tutorok munkáját, az 5–6 fős csoportok lehetséges munkaformáit, a differenciált csoportok funkcióját és alkalmazási területét ismerteti.

4. *A korrepetálásról.* Nem tekintjük a stratégia elengedhetetlen összetevőjének, de mint a jelenlegi oktatásban létező munkaforma a megtanításban is funkciót kaphat, elsősorban az előfeltétel-tudás kompenzálásában. Mi csupán az elő- és utókompenzálásban terveztük 1–1 óra időtartamra, de a valóságban 1 órát funkcionált az előkompenzálásban.

5. *Az előfeltétel-tudást mérő teszt* javítókulccsal. A teszt „A” és „B” változata együtt tartalmazza a közvetlenül szükséges előfeltétel-tudás teljes mennyiségét. Példaként az „A” változat:

Előteszt: „A” változat:

1. Írd fel műveleti jelekkel és számítsd ki! Mennyi $2\frac{8}{3}$ részének és $\frac{4}{5}\frac{8}{3}$ részének az összege?

2. Két szám összege 25, különbsége 11. Melyik ez a két szám? Ellenőrizd!

3. Végezd el a kijelölt műveleteket! Előbb a zárójelben!

$$(-2,5 + 6,4 - 9,8 + 11,3 - 9,25) : 5 = ?$$

4. Az alábbi kifejezés értékét kétféleképpen számítsd ki!

$$\left[\left(-\frac{2}{7} \right) - \left(+\frac{4}{5} - \frac{1}{7} \right) \right] - \frac{5}{3} = ?$$

5. Hány kilométer van még hátra a kerékpárosnak 150 km-re tervezett útjából, ha az egyik napon s km-t, a másik napon a hátralevő út negyedét tette meg?

6. Alakítsd a következő képletet úgy, hogy az $y = ax + b$ alakú legyen, majd ábrázold értéktáblázat nélkül!

$$y = \frac{4(x-1)}{2} + 1.$$

6. Az előkompenzálás feladatrendszere (feladatbank). Az előismereteket mérő teszt „A” és „B” változatában szereplő feladatokhoz ($22 + 26 = 48$) írott kompenzáló és elmélyítő feladatrendszert tartalmaz, amelyből a tanulók tudásbeli hiányosságainak, illetve továbbhaladásuk biztosításának megfelelően egyénileg vagy csoportosan kapnak feladatot. A legegyszerűbb példa: Feladatrendszer az előkompenzáláshoz $E(A)3/b$.

Racionális számok osztása:

1. Végezd el a következő osztásokat!

$$12:3 = \dots$$

Egyenlő előjelű számok hányadosa

$$(-12):(-3) = \dots$$

pozitív

$$(-2,25):(-0,25) = \dots$$

2. Végezd el a következő osztásokat!

$$(-14,8):4 = \dots$$

Különböző előjelű számok hányadosa

$$27,5:(-2,5) = \dots$$

negatív

3. Végezd el a kijelölt műveleteket!

$$(-6,2 + 12,8):3 = \dots$$

Műveleti sorrend!

4. Végül: $(-3,5 + 7,4 - 9,8 + 13,6 - 8,25):5 = \dots$

Az utolsó feladat nehézségi foka mindig a teszt szóban forgó itemének (alternatív elemének, tudáselemének) nehézségi fokával megegyező. Azt kell pótolnia!

7. *Előkompenzáló programtervezet.* Az eszközök és eljárások gyakorlati felhasználására, a kompenzáló órák megszervezésére tesz javaslatot. Fontossága miatt ezzel a ponttal részletesebben foglalkozunk.

Az előkompenzálásra a kísérlet 2—3 órát tervezett, ehhez kapcsolódik még 1 óra délutáni korrepetálás az egészen gyenge teljesítményt nyújtó tanulók részére.

A tesztek javítása után az áttekinthetőség érdekében a tanárok értékelő táblázatot készítenek minden tanulóra és itemre. A kijavított teszt 0 vagy 1 értékeit beírják ebbe a táblázatba, és előttük áll tanulókra, feladatokra, itemekre lebontva az előkompenzálás programozásának kulcsa.

A kimutatás alapján az osztály három részre bontható:

1. Azok a tanulók, akiknek teljesítménye hibátlan, illetve néhány item ismerete pótlandó.

2. Azok a tanulók, akiknek a teljesítménye nem érte el a 40—50%-ot.

3. Végül azok a tanulók, akik önállóan, illetve a tutor segítségével tudják pótolni hiányukat.

Az 1. csoportba tartozó tanulók a két vagy három kompenzáló órán felváltva lesznek tutorok. Hiányukat önállóan pótolják, további fejlődésüket pedig részben

a tutorság, részben a számukra kiadott gazdagító program biztosítja. Ezzel az ő kompenzálásuk, illetve továbbfejlesztésük befejeződik. Az első kompenzáló óra funkciója kétirányú. Egyik: a 2. csoportba tartozó tanulók „újra megtanítása” kis csoportokban. A feladatrendszerekből szukcesszíve közösen félig önállóan és önállóan dolgoznak fel elegendő számú példát. Másik: a 3. csoportba tartozó tanulókat két csoportba osztják: a) az önállóan dolgozni tudók, b) a tutorok segítségével dolgozók. Mindkét csoport egymás után kap feladatrendszereket.

A 2. és 3. kompenzáló óra lényegében abban különbözik az elsőtől, hogy itt már nem végzünk kiscsoportos munkát. Önálló és mikrocsoportos munka folyik tanári irányítással és segítséggel. Rendkívül jó szervezést, figyelmet és fegyelmet kíván ez a megoldás.

8. Tájékoztató a megtanítási programtervekhez. Itt a tanárok különféle óramozzatok (órakezdő feladatok, házi feladat, osztályfoglalkoztatás stb.) célszerű, a megtanítási stratégiák elveinek megfelelő megszervezéséről kaptak rövid összefoglalót.

9. A folyamatos kompenzálás módszerei és eszközei. Az órákon nyíló kompenzálási lehetőségeket sorolja fel, ezenkívül az órák utolsó 10 percében — a témák utolsó óráján — írható *formatív tesztek*et közöl. Ezek az egyes témák utáni diagnosztizálást szolgálják abból a célból, hogy megtörténhessen az oktatási folyamat szükségletnek megfelelő formálása.

Formatív teszt pl.:

1. téma „B” változat:

1. Oldd meg grafikusan, értéktáblázat nélkül a következő egyenletet:

$$\frac{8x-4}{2} = -\frac{2}{3}(6x+9).$$

2. $v = \frac{s}{t}$ képletből fejezd ki először s -et, majd t -t!

3. Oldd meg mérlegelvel a következő egyenleteket:

$$a) 4,2 + x = 16,3; \quad b) 2,1x = 4,41; \quad c) \frac{x}{1,5} = -3,8.$$

10. Órakezdő feladatbank. 100 szöveges feladatot tartalmaz, amelyek az egyenletek előkészítését szolgálják, különös tekintettel az egyenlettel megoldandó szöveges feladatok előkészítésére. A tanulóktól többnyire órakezdő feladatként csupán megoldási terv készítését kéri.

11. A megtanítási óraprogramok főlíaterve. A tanárok a főlíákat is kézhez kapják.

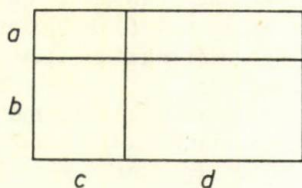
12. Megtanítási programok: 1—20 óra. A tematikus egység feldolgozását adja órákra bontva javaslatként. Lényegében a 8—11. pontokban felsorolt elveket, módszereket és eszközöket szintetizálja egy konkrét programhoz. A kidolgozott program maximális terhelést jelent, de lehetőséget ad a helyi körülményekhez alkalmazkodó egyéb változatokra is.

13. Gazdagító program a folyamatos szaktárgyi versenyhez. A kísérleti oktatáshoz elmélyítő versenyprogramot dolgoztunk ki. A versenyfeladatok funkciójának, alkalmazásának leírását és a versenyfeladatokat tartalmazza javítókulccsal.

14. Témazáró teszt (javítókulccsal). Itt is a tesztek „A” és „B” változata együtt tartalmazza a szükséges tudástartalmat.

Példa a „B” változatra:

1. Oldd meg az alábbi egyenletet: $\frac{8}{12} = \left(-\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5}$.



2. Mekkora a nagy téglalap területe? Írd fel kétféleképpen!

3. Alakítsd szorzattá a következő összegeket!

$$-3x^2 + 6x - 3 = ? \quad -x - y = ?$$

4. Egy kétjegyű szám egyik jegye háromszor akkora, mint a másik. Ha a jegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti kétszeresénél 15-tel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?

5. Egy folyami gőzhajó két kikötő között a víz folyásával megegyező irányban 4 óra alatt, ellenkező irányban 5 óra alatt teszi meg az utat. A folyóvíz sebessége 2 km/h. Hány km-re van egymástól a két kikötő?

6. Szijáttételnél a két kerék sugarának aránya 8:5. A kisebbik percenként 96 fordulatot tesz. Mennyit fordul ezalatt a nagyobbik kerék?

15. Az utókompenzálás feladatrendszere (feladatbank). A témazáró teszt minden egyes iteméhez egy kompenzáló feladatsor tartozik. A feladatbank része a gazdagító program is.

16. Utókompenzálási programtervezet. Lényegében az előkompenzáláshoz hasonlóan épül fel és hasonló eszközöket tartalmaz.

Az oktatási kísérlet

A vizsgálatot Pécs négy általános iskolájának hat nyolcadik osztályában végeztük, összesen 150 tanulóval. A kísérleti csoportban 2 gyakorló, egy városi (nem belvárosi) és egy peremkerületi iskolából szerepelt 2 jobb és 4 átlagos osztály.

A kísérlet 1982 október elejétől de-

cember közepéig tartott. Lényegében a tervnek (l. a blokk-sémát!) megfelelően, a forgatókönyv előírásai, javaslatai szerint zajlott le. Az elmélyítő versenyprogramban a tanulók mintegy 60%-a vett részt rendszeresen. Az utókompenzálást 2 órára terveztük, a gyakorlatban egy óra is elegendőnek bizonyult.

Az eredmények értékelése

A kísérletben részt vevő tanulók teljesítményéről részletes, a feladatok, itemek szintjéig bontott kimutatásaink vannak, és ez lehetővé teszi a tanulási folyamatok alapos elemzését. Itt csupán néhány összefoglaló adatot közlünk.

A kísérleti adatokat célszerű az előző évi összefüggés-vizsgálat eredményeivel összevetni. 1981-ben ugyanazokban az

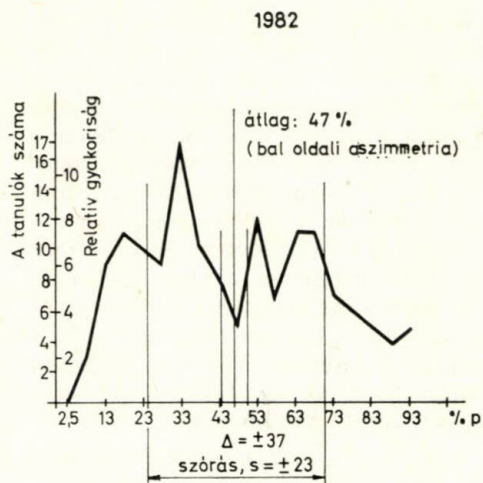
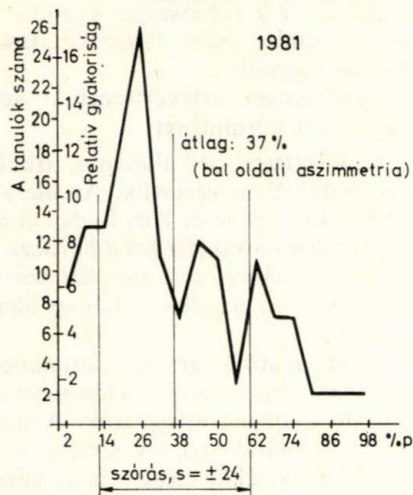
iskolákban végeztük el a témanyitó és a témazáró mérést, de ezenkívül az oktatási folyamatba semmilyen módon nem avatkoztunk be.

Mivel a mérés helye, a mérőeszköz, a tanulók életkora és a mintanagyság mindkét esetben azonos, az eredményeket közvetlenül összehasonlíthatjuk.

Az előfeltétel-tudás mérésének ered-

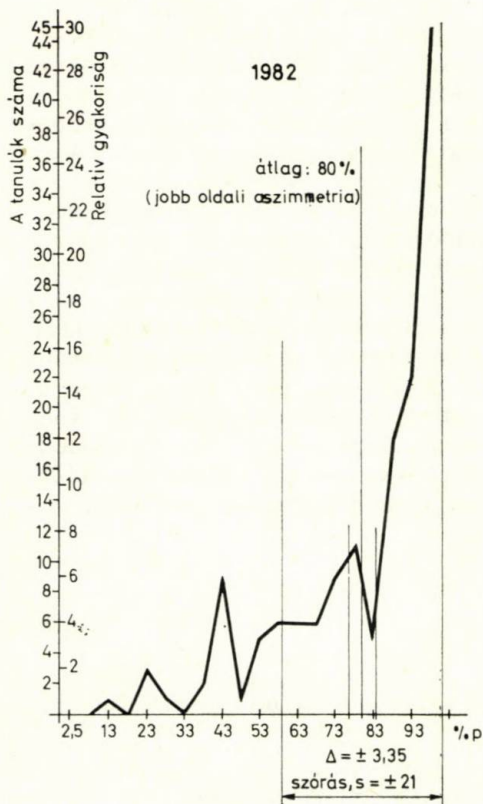
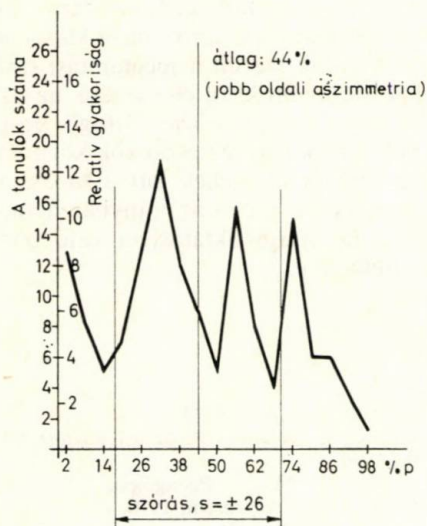
Gyakorisági sor gyakorisági poligonjai

E: előfeltétel – tudás



T: témazáró

1981



ményeit az 1. és a 2. ábrán tüntettük fel. A gyakorisági poligonok lényegében hasonló eloszlást mutatnak, mindkettő bal oldali aszimmetriát tükröz. A szórások között jelentéktelen az eltérés (24% pont, illetve 23% pont), viszont az átlagok között (1981: 37% pont, 1982: 47% pont) éppen 10% pont különbséget találtunk. Az utóbbi esetben mért jobb előfeltétel-tudás több tényezővel is magyarázható. Egyrészt 1983-ban két nagyobb létszámú osztály már az új tanterv szerint dolgozott (átlaguk 54% pont és 49,3% pont), és ennek hatása az eredményekben is tükröződik. Másrészt lényegében szeptembertől a kísérlet megkezdéséig a tanárok a kísérletre való felkészítésben vettek részt, és ez valószínűleg nem maradt hatás nélkül munkájukra.

A témazáró tesztek eredményeit a 3. és a 4. ábrán foglaltuk össze. Míg az előfeltétel-tudás mérő teszt eredményeinél az eloszlások hasonlóak voltak, itt már szembetűnő az 1981-es és az 1982-es mérés közötti különbség. A megtanítási stratégia során végzett mérés 80% pontos átlagot jelez, erősen jobb oldali aszimmetria mellett, szemben az előző év 44% pont átlagával. Mint már jeleztük, az 1982-es évben már az előtesztel mért induló szint is jobb volt, azonban csupán annak alapján ekkora teljesítménynövekedést nem magyarázhatunk meg, a változás nagyobbik hányadát a megtanítási stratégia hatásának kell tulajdonítanunk.

Érdemes még megjegyezni, hogy a hibátlan dolgozatok száma 44 volt (29,3%), a négyes és ötös dolgozatok száma összesen 111 (74%), ami több, mint a tanulók létszámának kétharmada.

A stratégia felfelé nivellált, elsősorban a kevés hiánnyal rendelkező tanulóknál eredményezett jelentős fejlődést. Az egészen gyenge, sok nehézséggel küzdő kb. 10%-nyi tanuló teljes felzárkóztatását nem tudta megoldani.

Az eredmények értékelésénél ki kell emelnünk két körülményt:

1. A kísérletet az általános iskola utolsó osztályában végeztük. Az ide eljutott tanulók egy része 8 év kudarcát és annak minden következményét hordozza, amit sem szaktárgyi, sem nevelési szempontból nem lehet néhány hónap alatt kompenzálni.

2. A matematika zárt, de esetünkben nem belépő tárgy, ahol az előismeretek viszonylag könnyen átfoghatók. A matematika tanulásában nagy szerepe van a hosszabb idő alatt elsajátítható készségeknek és jártasságoknak.

A programcsomag megítélésünk szerint hatékonyan működött. A kísérlet egyértelműen bizonyította, hogy a megtanítás lehetősége a matematikában is adott. Hangsúlyoznunk kell, hogy a kísérleti oktatás a pedagógusok számára a szokásosnál intenzívebb munkát jelentett és főleg nagymértékben megnövelte felelősségüket. A befektetett munka megtérült az eredményekben, de azért továbbra is keresnünk kell a tanárok kisebb terhelésével járó megoldásokat. Véleményünk szerint a megtanítási stratégiák szélesebb körű elterjedése, az oktatás hosszabb szakaszait átfogó programok kialakítása, az eszközök központi terjesztése és mindenekelőtt a tapasztalatok gyűjtése ebben az irányban hatná az új típusú oktatásban való rutin megszerzésére.

IRODALOM

- [1] *Általános iskolai tanterv — matematika 5—8. osztály.* OPI, Budapest, 1978.
- [2] BALOGH VIKTÓRIA: *Matematika kiegészítő tankönyv az általános iskola szakosított tantervű 8. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [3] CSAPÓ BENŐ: *A „mastery learning” elmélete és gyakorlata.* Magyar Pedagógia, 1978. 1. sz.
- [4] FALUS IVÁN: *Oktatócsomagok készítése és értékelése.* OOK, Veszprém, 1970.
- [5] GAZSÓ ISTVÁN: *Standardizált témazáró tesztek.* JATE, Szeged, 1975.

- [6] KUNSTÁR JÁNOSNÉ: *Feladatgyűjtemény az általános iskolai ideiglenes matematika-tantervhez.* Módszertani Közlemények Könyvtára, Szeged, 1977.
- [7] MÉSZÖLYNÉ FEHÉR KATALIN: *Alapvető fontosságú tananyagrészek optimális elsajátításának módszerei.* Pedagógiai Szemle, 1981. 2. sz.
- [8] NAGY JÓZSEF: *A témazáró tudásszintmérés gyakorlati kérdései.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [9] NAGY JÓZSEF: *A tanulók irányító értékelése feladatbankok segítségével a témakompenzációs oktatásban.* JATE, Szeged, 1977.
- [10] NAGY JÓZSEF: *Az információhordozók rendszerré szervezése.* Pedagógiai Technológia, 1981. 1. sz.
- [11] NAGY JÓZSEF: *A megtanítás stratégiája.* Köznevelés, 1981. 33. sz.
- [12] OROSZ LÁSZLÓ: *Megtanítási programcsomag az egyenletek c. témához (általános iskola 8. osztály).* Egyetemi doktori értekezés, JATE, Szeged, 1983.
- [13] PERÉNYI REZSŐ: *Egy megtanítási programcsomag kísérleti alkalmazása.* Pedagógiai Technológia, 1982. 2. sz.
- [14] SZÍVÁS JÁNOS: *Feladatgyűjtemény a matematika tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

DR. GERŐCS LÁSZLÓ

vezető tanár
Budapest

A Pascal-háromszög általánosítása, az általános Pascal-háromszög és a k -ad rendű Fibonacci-sorozat kapcsolata

A gimnáziumi fakultatív matematika-tantervek mindkét változata III. osztályban foglalkozik a számsorozatok tanítása során a sorozatok egy speciális fajtájával, a rekurzív sorozatokkal. Az ilyen típusú sorozatok vizsgálata ugyan leszűkül a legegyszerűbb sorozatra, a Fibonacci-sorozatra, mégis elmondhatjuk, hogy régi hiányosságot pótolnak e tantervek, amikor megismertetik diákjainkkal e sajátos számsorozatfajta lényegét, érdekességeit. Rendkívül motiváló erő a sorozatokban rejlő szabályosságok felfedeztetése, matematikai formába öntése, s ez egyben igen nagymértékben fejleszti a tanulók kreativitását, alkotókedvét s nem utolsósorban az általánosításra való törekvés igényét. Szakköri foglalkozások, szorgalmi házi feladatok, önálló témafeldolgozó házi dolgozatok igen tág teret nyújtanak a diákok kutatókedvének szélesítésére, s ehhez kiváló területnek kínálkozik a rekurzív sorozatok mélyebb vizsgálata, illetve az e sorozatokkal kapcsolatos számtalan probléma felvetése, megoldása, esetleges

általánosítása. Emellett a rekurzív sorozatok s a velük kapcsolatos számtalan kérdéskör rendkívül hálás terület a teljes indukciós bizonyítási módszer alkalmazási körének kiterjesztésére, e módszer lényegének mélyebb megértésére, alkalmazásának készségszintre való emelésére.

További előnye ennek a témakörnek, hogy a III. osztályos fakultatív tantervek eléggé részletesen tárgyalják a kombinatorika elemeit, mélyebben megismerik a tanulók a Pascal-háromszög, illetve a binomiális együtthatók lényegét és alkalmazási területeit.

Ez mindenképpen indokolja, hogy rávilágítsunk az időben tőle nem túl messze tárgyalandó Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög mélyebb kapcsolataira, sőt az általánosítás igényét fejlesztendő, az általános Fibonacci-sorozat és az általános Pascal-háromszög közötti hasonló típusú kapcsolatra.

Jelen cikkben a Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög közötti jól ismert kapcsolat felelevenítése után a Pascal-háromszög egy általánosítását fogjuk

megadni, majd megmutatjuk, hogy az általános Pascal-háromszög és az általános k -ad rendű Fibonacci-sorozat között

fennáll ugyanaz a kapcsolat, mint az eredeti Pascal-háromszög és az eredeti Fibonacci-sorozat között.

A Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög kapcsolatáról

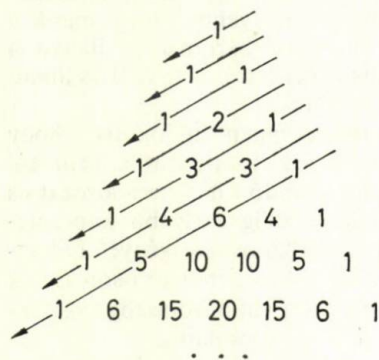
Több mint hét évszázad telt el azóta, hogy Leonardo Pisano — ismertebb nevén Fibonacci — „Liber Abaci” című munkájában egy olyan problémát vetett fel, amely az $f_0=0$, $f_1=1$ kezdőelemekkel és $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ ($n \geq 2$) rekurzióval definiált számsorozathoz vezetett. E sorozatot azóta is Fibonacci-sorozatnak, elemeit pedig Fibonacci-számoknak nevezzük.

Leonardo Pisano óta igen sokan foglalkoztak az f_n sorozattal, sőt az általánosabb másodrendű, illetve k -ad rendű sorozatoknak is igen kiterjedt irodalmuk van. (Egy rekurzióval definiált sorozatot lineárisnak nevezünk, ha valamely indextől kezdve minden tagja felírható az előtte levő tagok lineáris kombinációjaként, és k -ad rendűnek mondjuk, ha e lineáris kombinációban csak a kérdéses tagot megelőző k db tag szerepel.) Többen rámutattak, hogy a Fibonacci-számok igen gyakran fordulnak elő a természetben (pl. Sain Márton [1], Rényi Alfréd [2]), kapcsolatuk van bizonyos áramkörök ellenállásával (pl. Recski András [3]), sőt összefüggésben állnak bizonyos zenei kompozíciókkal is (pl. H. Norden [4]). A sorozat elemeinek tulajdonságaival sok helyen találkozhatunk a szakirodalomban. Ismert a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok elemeinek explicit alakja (pl. Niven—Zuckerman [5] 89., 90. oldal), a sorozat elemeinek alsó, illetve felső becslése, valamint a sorozat elemeinek a Pell-egyenlettel való kapcsolata (pl. Kiss Péter [6]). Ezek mellett még tovább sorolhatnánk a matematika számos területéről olyan problémákat, amelyek igen szoros kapcsolatban állnak a lineáris rekurzív sorozatok elméletével.

Természetesen számos probléma megoldása ismeretlen még a legegyszerűbb sorozat, az f_n Fibonacci-sorozat esetében is. Például ma sem tudjuk a választ arra a már klasszikusnak számító kérdésre, vajon az f_n sorozatban előforduló prímek száma véges vagy végtelen. Azt már tudjuk, hogy a sorozat páratlan indexű elemeinek nem lehet $4k-1$ alakú osztója, ezért nincs közöttük ilyen alakú prím sem — (pl. N. N. Vorovjev [7]), de a teljes f_n sorozatra vonatkozóan e kérdés még eldöntetlen.

Régóta ismert tény, hogy ha a Pascal-háromszög elemeit megfelelő módon összeadjuk, éppen a Fibonacci-sorozat elemeihez jutunk. Írjuk fel a Pascal-háromszöget, és képezzük sorban a nyilak mentén található számok összegét!

A következő sorozatot kapjuk:



és általában:

$$f_1 = 1, \quad f_4 = 1 + 2 = 3,$$

$$f_2 = 1, \quad f_5 = 1 + 3 + 1 = 5,$$

$$f_3 = 2, \quad f_6 = 1 + 4 + 3 = 8,$$

$$(1) \quad f_{2n-1} = \binom{2n-2}{0} + \binom{2n-3}{1} + \binom{2n-4}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} = \sum_{i=1}^n \binom{2n-i-1}{i-1}$$

és

$$f_{2n} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \sum_{i=1}^n \binom{2n-i}{i-1}.$$

Hogy valóban a Fibonacci-sorozathoz jutottunk, az azonnal kiderül, ha kiírjuk f_{2n+1} -et és felhasználjuk a binomiális együtthatók

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \binom{2n}{0} = \binom{2n-1}{0} \quad \text{és} \quad \binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1}$$

jól ismert azonosságait:

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &= \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} + \binom{2n-3}{3} + \dots + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{2n-1}{0} + \\ &+ \binom{2n-2}{0} + \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{1} + \binom{2n-3}{2} + \binom{2n-4}{2} + \binom{2n-4}{3} + \dots + \binom{n}{n-2} + \\ &+ \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} = f_{2n} + f_{2n-1}. \end{aligned}$$

Egy másik fajta kapcsolathoz jutunk a Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög között, ha elvégezzük a sorozat n -edik elemének a definíció szerinti sorozatos felbontását és vizsgáljuk e felbontásokban szereplő együtthatókat:

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} = \\ &= f_{n-2} + 2 \cdot f_{n-3} + f_{n-4} = \\ &= f_{n-3} + 3 \cdot f_{n-4} + 3 \cdot f_{n-5} + f_{n-6} = \\ &= f_{n-4} + 4 \cdot f_{n-5} + 6 \cdot f_{n-6} + 4 \cdot f_{n-7} + f_{n-8} = \\ &= \dots \end{aligned}$$

Az egyes felbontásokban az együtthatók rendre: 1 1, 1 2 1, 1 3 3 1, 1 4 6 4 1, ..., vagyis éppen a Pascal-háromszög elemei. Hogy ez később is igaz marad, azt teljes indukcióval láthatjuk be. Tegyük fel, hogy valamely $0 < j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ esetén

$$(2) \quad f_n = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \cdot f_{n-j-i},$$

és igazoljuk, hogy e tulajdonság öröklődik j -ről $(j+1)$ -re.

Az indukciós feltevést részletesen kiírva és felhasználva a binomiális együtthatók már korábban is idézett tulajdonságait, valamint a Fibonacci-sorozat definícióját:

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \cdot f_{n-j-i} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \cdot (f_{n-j-i-1} + f_{n-j-i-2}) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \cdot f_{n-j-i-1} + \\ &+ \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \cdot f_{n-j-i-2} = \binom{j}{0} \cdot f_{n-j-1} + \left[\binom{j}{0} + \binom{j}{1} \right] \cdot f_{n-j-2} + \left[\binom{j}{1} + \binom{j}{2} \right] \cdot f_{n-j-3} + \dots + \\ &+ \left[\binom{j}{j-1} + \binom{j}{j} \right] \cdot f_{n-2j-1} + \binom{j}{j} \cdot f_{n-2j-2} = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} \cdot f_{n-(j+1)-i}. \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy (2) teljesül minden j -re, feltéve természetesen, hogy $0 < j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

A továbbiakban a Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög közötti kapcsolatot fogjuk általánosítani az alább definiálandó k -ad rendű Fibonacci-sorozat és az általános Pascal-háromszög között.

Az általánosítás

A Fibonacci-sorozat általánosításával igen sok helyen és sokféle módon találkozunk a szakirodalomban. A legegyszerűbb általánosítása úgy adható meg a sorozatnak, ha nem a sorozat első két elemét, hanem első három, négy, illetve k darab elemét adjuk meg és ezután alkalmazzuk a rekurzív formulát. Speciális eset, ha az első k darab elem 1, ilyenkor „ k -ad rendű Fibonacci-sorozatnak” nevezzük a kapott számsorozatot. Az ilyen sorozatok irodalma szintén nagyon kiterjedt; számos, az eredeti Fibonacci-sorozattal kapcsolatos eredmény egyszerű módon általánosítható k -ad rendű Fibonacci-sorozatokra is.

k -ad rendű Fibonacci-sorozaton a következő sorozatot értjük:

$$F_0^{(k)} = F_1^{(k)} = \dots = F_{k-1}^{(k)} = 1 \quad \text{és} \quad F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k F_{n-i}^{(k)} \quad (n \geq k).$$

Ha az első k darab elem nem csupa 1, hanem $F_0^{(k)} = A_0, F_1^{(k)} = A_1, \dots, F_{k-1}^{(k)} = A_{k-1}$ ($A_i \geq 0$ egész és nem mind zérus), akkor a sorozatot k -ad rendű Fibonacci-szerű sorozatnak mondjuk.

(A továbbiakban a jobb felső indexben szereplő k rendszámot — mivel ez nem okoz félreértést — nem írjuk ki.)

Példaként nézzük meg $k=3, 4, 5, 6$ esetén az $F_n^{(k)}$ sorozat néhány kezdő elemét:

	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
0.	1	1	1	1
1.	1	1	1	1
2.	1	1	1	1
3.	3	1	1	1
4.	5	4	1	1
5.	9	7	5	1
6.	17	13	9	6
7.	31	25	17	11
8.	57	49	33	21

Ezek után tekintsük a Pascal-háromszög általánosítását: k -adik Pascal-háromszögnek nevezzük az egész számok

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & 3 & 2 & 1
 \end{array} \quad (k \text{ darab})$$

alakú elrendezését.

A háromszög elemeit a következő módon képezzük:

a) Ha k páratlan: A 0. sorba 1 darab 1-est, az első sorba szimmetrikusan k darab 1-est írunk. Ezután minden sort az öt megelőző sor kezdő (vagy nulladik) elemétől $\frac{k-1}{2}$ hellyel balra kezdünk. Az elemeket úgy képezzük, hogy összeadjuk

a fölötte levő és az attól balra, illetve jobbra levő $\frac{k-1}{2}$ darab elemet. Tehát a háromszög i -edik sorának j -edik eleme:

$$(3) \quad c_i^j = c_{i-1}^j + c_{i-1}^{j-1} + c_{i-1}^{j-2} + \dots + c_{i-1}^{j-(k-1)} = \sum_{r=0}^{k-1} c_{i-1}^{j-r}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, \text{ és } j = 0, 1, 2, \dots, i \cdot (k-1))$$

figyelembe véve, hogy $c_r^s = 0$, ha $s < 0$ vagy $s > r(k-1)$.

b) Ha k páros: A 0. sorba 1 darab 1-est, az első sorba szimmetrikusan k darab 1-est írunk, de az elemeket most nem egymás alatt, hanem „ferdén” helyezük el, mint az eredeti Pascal-háromszögben. Ezután minden sort az öt megelőző sor kezdő elemétől $\frac{k}{2}$ hellyel balra kezdünk. Az egyes elemeket úgy kapjuk, hogy a fölötte levő sorban a kérdéses elemtől jobbra, illetve balra levő $\frac{k}{2}$ darab elemet összeadjuk.

Természetesen, ha k páros, akkor is (3) lesz az i -edik sor j -edik eleme. Az is nyilvánvaló, hogy a háromszög i -edik sorában levő elemek száma $i(k-1)+1$.

Példaként bemutatjuk a 3. és 4. Pascal-háromszög néhány sorát:

$k = 3$

				1			
			1	1	1		
		1	2	3	2	1	
	1	3	6	7	6	3	1
1	4	10	16	19	16	10	4
1	5	15	25	31	25	15	5
1	6	21	36	51	36	21	6
1	7	28	49	70	49	28	7
1	8	36	64	91	64	36	8
1	9	45	81	105	81	45	9
1	10	55	100	126	100	55	10
1	11	66	121	154	121	66	11
1	12	78	144	183	144	78	12
1	13	91	169	214	169	91	13
1	14	105	196	246	196	105	14
1	15	120	225	279	225	120	15
1	16	136	256	313	256	136	16
1	17	153	289	348	289	153	17
1	18	171	324	385	324	171	18
1	19	190	361	423	361	190	19
1	20	210	400	462	400	210	20
1	21	231	441	503	441	231	21
1	22	253	484	545	484	253	22
1	23	276	529	589	529	276	23
1	24	300	576	634	576	300	24
1	25	325	625	681	625	325	25
1	26	351	676	729	676	351	26
1	27	378	729	778	729	378	27
1	28	406	784	829	784	406	28
1	29	435	841	881	841	435	29
1	30	465	900	935	900	465	30
1	31	496	961	991	961	496	31
1	32	528	1024	1048	1024	528	32
1	33	561	1089	1107	1089	561	33
1	34	595	1156	1167	1156	595	34
1	35	630	1225	1229	1225	630	35
1	36	666	1296	1293	1296	666	36
1	37	703	1369	1359	1369	703	37
1	38	741	1444	1427	1444	741	38
1	39	780	1521	1497	1521	780	39
1	40	820	1600	1569	1600	820	40
1	41	861	1681	1643	1681	861	41
1	42	903	1764	1719	1764	903	42
1	43	946	1849	1797	1849	946	43
1	44	990	1936	1877	1936	990	44
1	45	1035	2025	1959	2025	1035	45
1	46	1081	2116	2043	2116	1081	46
1	47	1128	2209	2129	2209	1128	47
1	48	1176	2304	2217	2304	1176	48
1	49	1225	2401	2307	2401	1225	49
1	50	1275	2500	2399	2500	1275	50
1	51	1326	2601	2493	2601	1326	51
1	52	1378	2704	2589	2704	1378	52
1	53	1431	2809	2687	2809	1431	53
1	54	1485	2916	2787	2916	1485	54
1	55	1540	3025	2889	3025	1540	55
1	56	1596	3136	2993	3136	1596	56
1	57	1653	3249	3099	3249	1653	57
1	58	1711	3364	3207	3364	1711	58
1	59	1770	3481	3317	3481	1770	59
1	60	1830	3600	3429	3600	1830	60
1	61	1891	3721	3543	3721	1891	61
1	62	1953	3844	3659	3844	1953	62
1	63	2016	3969	3777	3969	2016	63
1	64	2080	4096	3897	4096	2080	64
1	65	2145	4225	4019	4225	2145	65
1	66	2211	4356	4143	4356	2211	66
1	67	2278	4489	4269	4489	2278	67
1	68	2346	4624	4397	4624	2346	68
1	69	2415	4761	4527	4761	2415	69
1	70	2485	4900	4659	4900	2485	70
1	71	2556	5041	4793	5041	2556	71
1	72	2628	5184	4929	5184	2628	72
1	73	2701	5329	5067	5329	2701	73
1	74	2775	5476	5207	5476	2775	74
1	75	2850	5625	5349	5625	2850	75
1	76	2926	5776	5493	5776	2926	76
1	77	3003	5929	5639	5929	3003	77
1	78	3081	6084	5787	6084	3081	78
1	79	3160	6241	5937	6241	3160	79
1	80	3240	6400	6089	6400	3240	80
1	81	3321	6561	6243	6561	3321	81
1	82	3403	6724	6399	6724	3403	82
1	83	3486	6889	6557	6889	3486	83
1	84	3570	7056	6717	7056	3570	84
1	85	3655	7225	6879	7225	3655	85
1	86	3741	7396	7043	7396	3741	86
1	87	3828	7569	7209	7569	3828	87
1	88	3916	7744	7377	7744	3916	88
1	89	4005	7921	7547	7921	4005	89
1	90	4095	8100	7719	8100	4095	90
1	91	4186	8281	7893	8281	4186	91
1	92	4278	8464	8069	8464	4278	92
1	93	4371	8649	8247	8649	4371	93
1	94	4465	8836	8427	8836	4465	94
1	95	4560	9025	8609	9025	4560	95
1	96	4656	9216	8793	9216	4656	96
1	97	4753	9409	8979	9409	4753	97
1	98	4851	9604	9167	9604	4851	98
1	99	4950	9801	9357	9801	4950	99
1	100	5050	10000	9549	10000	5050	100

A *c*) tulajdonság az eredeti Pascal-háromszöghöz hasonlóan a *k*-edik Pascal-háromszög szimmetriatulajdonságát mutatja. Az *a*), *b*), *c*) tulajdonságok további következménye, hogy

$$e) \quad c_i^{i \cdot (k-1)} = 1,$$

$$f) \quad c_i^{i \cdot (k-1) - 1} = i.$$

Hogy itt valóban a Pascal-háromszög egyfajta általánosításáról van szó, azt mutatja az alábbi tétel, illetve annak néhány egyszerűbb következménye.

Tétel: A *k*-edik Pascal-háromszög *n*-edik sorának elemei az

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{k-1})^n$$

n · (*k* - 1)-ed fokú polinom együtthatói.

Bizonyítás: A bizonyítást rögzített *k* mellett *n*-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

n = 1 esetén az állítás a *k*-edik Pascal-háromszög fenti definíciójából következik.

Tegyük fel, hogy valamely *n*-re igaz a tétel, vagyis

$$(5) \quad \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \right)^n = \sum_{i=0}^{n \cdot (k-1)} c_n^i \cdot x^i.$$

Ezt felhasználva igazoljuk, hogy

$$(6) \quad \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \right)^{n+1} = \sum_{i=0}^{(n+1)(k-1)} c_{n+1}^i \cdot x^i \text{ is teljesül.}$$

(6) bal oldalát átalakítva és felhasználva az (5) indukciós feltevést:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \right)^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i \right)^n \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i = \sum_{i=0}^{n \cdot (k-1)} c_n^i \cdot x^i \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i = \\ &= (c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \dots + c_n^{n(k-1)} \cdot x^{n(k-1)}) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i = \\ &= c_n^0 + (c_n^0 + c_n^1) \cdot x + (c_n^0 + c_n^1 + c_n^2) \cdot x^2 + \dots + \\ &+ (c_n^0 + c_n^1 + \dots + c_n^{k-1}) \cdot x^{k-1} + (c_n^1 + c_n^2 + \dots + c_n^k) \cdot x^k + \\ &\dots + (c_n^{n(k-1)} + c_n^{n(k-1)-1}) \cdot x^{(n+1)(k-1)-1} + c_n^{(n+1)(k-1)} \cdot x^{(n+1)(k-1)} = \\ &= c_{n+1}^0 + c_{n+1}^1 \cdot x + c_{n+1}^2 \cdot x^2 + \dots + c_{n+1}^{k-1} \cdot x^{k-1} + c_{n+1}^k \cdot x^k + \dots + \\ &+ c_{n+1}^{(n+1)(k-1)-1} \cdot x^{(n+1)(k-1)-1} + c_{n+1}^{(n+1)(k-1)} \cdot x^{(n+1)(k-1)} = \\ &= \sum_{i=0}^{(n+1)(k-1)} c_{n+1}^i \cdot x^i. \end{aligned}$$

Itt az utolsó *k* darab tagban felhasználtuk a (4)-ben ismertetett tulajdonságokat, azaz hogy *j* < *k* esetén

$$c_n^{n(k-1)} + c_n^{n(k-1)-1} + \dots + c_n^{n(k-1)-j} = c_n^0 + c_n^1 + \dots + c_n^j = c_{n+1}^j = c_{n+1}^{(n+1)(k-1)-j}.$$

És most nézzük a tétel néhány érdekes következményét:

1. *x* = 1 helyettesítéssel kapjuk az eredeti Pascal-háromszög egy jól ismert tulaj-

donságának általánosítását:

$$\sum_{i=0}^{n \cdot (k-1)} c_n^i = k^n.$$

2. $x = -1$ esetén szintén az eredeti Pascal-háromszög egy ismert tulajdonságának általánosítása adódik:

$$\sum_{i=0}^{n \cdot (k-1)} (-1)^i \cdot c_n^i = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, & \text{ha } k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}.$$

Ezek után vizsgáljuk a (2) egyenlőség általánosítását k -ad rendű Fibonacci-sorozat és k -adik Pascal-háromszög esetén.

Tétel: Az $F_n^{(k)}$ k -ad rendű Fibonacci-sorozat n -edik elemére

$$(7) \quad F_n = \sum_{j=0}^{i \cdot (k-1)} c_i^j \cdot F_{n-i-j},$$

ahol c_i^j a k -adik Pascal-háromszög megfelelő eleme és $i \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Bizonyítás: A bizonyítást i -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $i=1$ esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen $c_1^j = 1$ ($0 \leq j \leq k$) miatt

$$F_n = \sum_{j=1}^k F_{n-j} = \sum_{j=0}^{k-1} F_{n-j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} c_1^j \cdot F_{n-j-1}.$$

Tegyük fel, hogy $i=r$ esetén igaz (7), azaz

$$(8) \quad F_n = \sum_{j=0}^{r \cdot (k-1)} c_r^j \cdot F_{n-r-j},$$

és igazoljuk, hogy ekkor $i=r+1$ esetén is igaz lesz, vagyis

$$F_n = \sum_{j=0}^{(r+1)(k-1)} c_{r+1}^j \cdot F_{n-(r+1)-j},$$

feltéve, hogy $r+1 \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Írjuk ki a (8) egyenlőséget részletesen és használjuk fel a k -ad rendű Fibonacci-sorozat, valamint a c_i^j -k definícióját, illetve tulajdonságait!

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{j=0}^{r \cdot (k-1)} c_r^j \cdot F_{n-r-j} = \sum_{j=0}^{r \cdot (k-1)} c_r^j \cdot \left(\sum_{t=1}^k F_{n-r-j-t} \right) = \sum_{j=0}^{r \cdot (k-1)+k} F_{n-r-j} \left(\sum_{t=0}^{k-1} c_r^{j-t-1} \right) = \\ &= F_{n-r-1} \cdot c_r^0 + F_{n-r-2} \cdot (c_r^0 + c_r^1) + F_{n-r-3} \cdot (c_r^0 + c_r^1 + c_r^2) + \\ &+ \dots + F_{n-r-k} \cdot (c_r^0 + c_r^1 + \dots + c_r^{k-1}) + \dots + F_{n-(r+1)k} \cdot c_r^{(k-1)} = \\ &= F_{n-(r+1)} \cdot c_{r+1}^0 + F_{n-(r+1)-1} \cdot c_{r+1}^1 + F_{n-(r+1)-2} \cdot c_{r+1}^2 + \\ &+ \dots + F_{n-(r+1)-(k-1)} \cdot c_{r+1}^{k-1} + \dots + F_{n-(r+1)k} \cdot c_{r+1}^{(r+1)(k-1)} = \\ &= \sum_{j=0}^{(r+1)(k-1)} c_{r+1}^j \cdot F_{n-(r+1)-j}. \end{aligned}$$

Itt természetesen felhasználtuk, hogy $c_i^j = 0$, ha $j < 0$ vagy $j > i \cdot (k-1)$.

Tehát indukciós feltevésünk $i=r$ -ről $i=r+1$ -re öröklődik, s ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Befejezésül nézzük meg (1) általánosítását egy k -ad rendű Fibonacci-szerű sorozatra!

Tétel: Legyen $F_n^{(k)}$ egy k -ad rendű Fibonacci-szerű sorozat, amelynek kezdő elemei: $F_0=F_1=\dots=F_{k-2}=0$, $F_{k-1}=1$, valamint jelölje c_i^j a k -adik Pascal-háromszög megfelelő elemeit! Ekkor minden i természetes számra

$$(9) \quad F_{k+i-1} = \sum_{j=0}^i c_{i-j}^j.$$

Bizonyítás: Mindenekelőtt belátjuk, hogy ha $0 \leq i \leq k$, akkor

$$(10) \quad F_{k+i} = 2^i.$$

A sorozat definíciója alapján $i=0$ esetén

$$F_k = \sum_{j=1}^k F_{k-j} = 1 = 2^0.$$

Tegyük fel, hogy (10) igaz minden $i < j$ esetén ($j \leq k$). Akkor

$$F_{k+j} = \sum_{r=1}^k F_{k+j-r} = F_{k-1} + \sum_{r=1}^j F_{k+j-r} = 1 + \sum_{r=1}^j 2^{j-r} = 1 + 2^j - 1 = 2^j.$$

Ezzel (10)-et igazoltuk.

Ezek után megmutatjuk, hogy minden $i \leq k$ esetén igaz (9).

$i=1$ esetén $c_1^0 + c_0^1 = 1 + 0 = 1 = F_k$ miatt igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq i \leq k-1$ esetén

$$(11) \quad \sum_{j=0}^i c_{i-j}^j = 2^{i-1} = F_{k+i-1}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $i+1 \leq k$ esetén

$$\sum_{j=0}^{i+1} c_{i+1-j}^j = F_{k+i}.$$

Mivel $i=0$ esetén

$$\sum_{j=0}^i c_{i-j}^j = c_0^0 = 1$$

és $c_r^s=0$, ha $s < 0$ vagy $s > r \cdot (k-1)$, ezért (11)-et és c_r^s definícióját felhasználva

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i+1} c_{i+1-j}^j &= c_0^{i+1} + \sum_{j=0}^i c_{i+1-j}^j = \sum_{j=0}^i c_{i+1-j}^j = \sum_{j=0}^i \sum_{r=0}^j c_{i-j}^{j-r} = \sum_{j=0}^i \sum_{r=0}^j c_{i-j}^r = \\ &= \sum_{t=0}^i \sum_{s=0}^{i-t} c_{i-t-s}^s = c_0^0 + \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{i-t} c_{i-t-s}^s = 1 + \sum_{t=0}^{i-1} 2^{i-t-1} = 2^i = F_{k+i} \end{aligned}$$

következik. Tehát (9) igaz $1 \leq i \leq k$ esetén.

Ezek után már csak azt kell belátni, hogy ha tetszőleges k darab egymás utáni i -re igaz (9), akkor a rájuk következő i -re is igaz marad.

Tegyük fel, hogy valamely tetszőleges i -re

$$(12) \quad \begin{aligned} c_{i+1}^0 + c_i^1 + c_{i-1}^2 + \dots + c_{i-r}^{r+1} + \dots + c_0^{i+1} &= F_{k+i}, \\ c_{i+2}^0 + c_{i+1}^1 + \dots + c_{i-r-1}^{r+1} + \dots + c_0^{i+2} &= F_{k+i+1}, \\ &\vdots \\ c_{i+k}^0 + c_{i+k-1}^1 + c_{i+k-2}^2 + \dots + c_0^{i+k} &= F_{2k+i-1}. \end{aligned}$$

Természetesen itt minden egyenlőség bal oldalán bizonyos tagtól kezdve $c_i^i = 0$, ugyanis az i -edik sor utolsó nem 0 eleme $c_i^{i \cdot (k-1)}$.

Most adjuk össze a (12)-ben szereplő k darab egyenlőség megfelelő oldalait:

$$\text{A jobb oldal:} \quad \sum_{j=0}^{k-1} F_{k+i+j} = F_{2k+i}.$$

A bal oldal pedig — az elemeket átlósan összeadva és c_r^r definícióját felhasználva:

$$\sum_{r=0}^{i+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_r^{i+k-r-j} = \sum_{r=0}^{i+k} c_{r+1}^{i+k-r} = \sum_{s=0}^{i+k} c_{i+k+1-s}^s = \sum_{s=0}^{i+k+1} c_{i+k+1-s}^s,$$

mivel $c_0^{i+k+1} = 0$.

Tehát

$$F_{2k+i} = \sum_{s=0}^{i+k+1} c_{i+k+1-s}^s,$$

vagyis (9) a $2k+i$ index esetén is igaz. Az előzők alapján ebből már minden n természetes számra következik a tétel állítása.

IRODALOM

- [1] SAIN MÁRTON: *A Fibonacci-sorozattól lánc törttekkel az aranymetszésig. Élő matematika* 3., Tankönyvkiadó, 1975. 77—106. oldal.
- [2] RÉNYI ALFRÉD: *Napló az információelméletéről*. Gondolat, Bp. 1976. 157. oldal.
- [3] RECSKI ANDRÁS: *On the generalization of the Fibonacci numbers*. Fibonacci Quarterly, 13 (1975) 315—317. oldal.
- [4] H. NORDEN: *Proportions and the composer*. Fibonacci Quarterly, 10 (1972) 319—323. oldal.
- [5] I. NIVEN—H. S. ZUCKERMAN: *Bevezetés a számelméletbe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978., 89., 90. oldal.
- [6] KISS PÉTER: *Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok és alkalmazásaik diofantikus problémák vizsgálatában*. Kandidátusi értekezés, 1979.
- [7] N. N. VOROVJEV: *Császla Fibonacci*. Moszkva, 1978.

DR. BÖRÖCZKY KÁROLY
tanszékvezető egyetemi tanár
ELTE, Budapest

Néhány feladat az alakzatok optimális elrendezéseinek kérdésköréből

Alakzatrendszerek beható tanulmányozásával csak viszonylag későn, az utóbbi 100 évben kezdtek el foglalkozni a geometriában. Legrégibb hagyománya a szabályos rendszerek vizsgálatának van. Alakzatrendszerekkel a diszkrét

geometriában és a kombinatorikus geometriában foglalkoznak elsősorban. A diszkrét geometriában különböző rendszereket hasonlítanak össze és ezek közül választják ki a legjobbakat. Ezek a kutatások megelégnítették a XX. századi

geometriát, a korábbi, inkább statikus vizsgálatokba mozgást, dinamizmust vittek. Ennek az irányzatnak a kiteljesedésében kiemelkedő szerepe van Fejes Tóth Lászlónak s az ő munkásságához kapcsolódó számos magyar, ill. külföldi tanítványának, munkatársának. Ebben a cikkben ebből a témakörből mutatunk be néhány olyan problémát, feladatot, amelyek az oktatás során is jól használhatók.

Ha egyenlő sugarú köröket úgy helyezzünk el a síkon, hogy minden kört pontosan hat másik érintsen, akkor így egy szabályos rendszerhez jutunk. Ez a körrendszer például a legsűrűbb az összes olyan körrendszer közül, amelyek egyenlő sugarú és egymásba nem metsző körökből épülnek fel. Ennek igazolását megkönnyíti a rendszer „határtalansága”, az viszont megnehezíti, hogy az egész síkra kell a sűrűséget értelmezni.

Ha korlátos tartományba akarunk minél több kört elhelyezni, akkor ennek

Egy körrendszert körelhelyezésnek nevezünk, ha a körlemezeken közül semelyik kettőnek sincs közös belső pontja. Két klasszikus problémát tekintsünk elsőként:

a) Hogyan kell egy adott R_1 sugarú körbe n darab egybevágó kört úgy elhelyezni, hogy körelhelyezést alkossanak, és a sugaruk a lehető legnagyobb legyen?

b) Hogyan kell egy adott R_2 sugarú körbe n darab pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebb levő pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?

A második feladat megoldását $n=3, 4$ és 5 esetén mindenki rögtön látja, a körbeírt szabályos n -szög csúcsai adják a megoldást. Például $n=5$ -re nézzük a bizonyítást! Az R_2 sugarú körbe beírt szabályos ötszög oldalának hosszát jelöljük d -vel! Mint ismert, $d > R_2$. Ha az öt pont egyike a kör középpontjában van, akkor tőle a többi pont legfeljebb R_2 távolságra van, s ezért a minimális távolság az öt pont között legfeljebb R_2 , ami kisebb d -nél. Ha az öt pont egyike sincs a kör középpontjában, akkor tekintsük a pontokon áthaladó sugarakat! Ha egy sugáron több pont is lenne, akkor a minimális távolság még R_2 -nél is kisebb. Ha öt pont öt különböző sugáron van, akkor a szomszédos sugarak öt körcíkket határolnak. Egy 72° középponti szögű körívek átmérője d , s egy ennél kisebb középponti szögű körívek átmérője d -nél kisebb, azaz ennek bármely két pontja d -nél közelebb van egymáshoz. Ahhoz, hogy a pontok közötti legkisebb távolság d lehessen, az kell, hogy az öt körívek mindegyikében a középponti szög legalább 72° , azaz mindegyik pontosan 72° legyen. Mivel a 72° -os körívekben a d átmérő csak az ív végpontjai között lép fel, ezért az optimális elrendezésben az öt pont a kör határán helyezkedik el, szabályos ötszöget alkotva.

1. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az a) és b) problémák ekvivalensek, azaz minden n -hez lehet találni alkalmas R_1 és R_2 értékeket, amelyekre a körközéppont-rend-

az alakzatnak a határa fontos szerepet játszik a kérdés megoldásában. Legtöbb ilyen típusú feladat reménytelenül nehéz, hacsak nem valamilyen „szabályos” alakzatot akarunk nem túl sok körrel kitölteni. Hasonló jelenségek lépnek fel fedési, illetve feldarabolási problémáknál is. Ezért az általunk választott témákban az alakzatok száma nem lesz nagy, s a vizsgált tartomány is speciális alakú lesz.

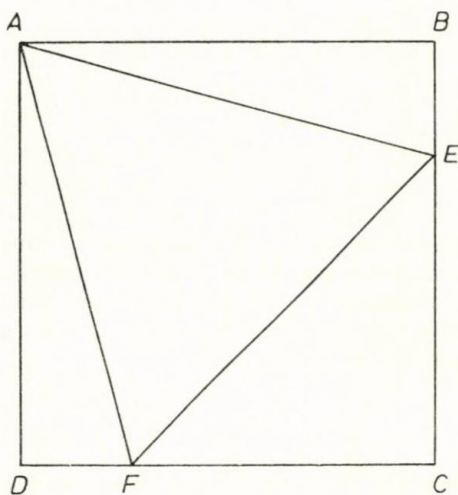
A szakirodalom számos ilyen problémát ismer. Ezek egy része meglepően nehéz. Ezért a hasonlóknak tűnő feladatok megoldása mögött is sokszor egészen eltérő matematikai teljesítmények húzódnak meg. Mivel ennek a cikknek nem az elért eredmények ismertetése, hanem bizonyos témakörök bemutatása és ehhez kapcsolódó feladatok kitűzése a célja, ezért általában mellőzzük az egyes feladatok első kitűzőinek, ill. első megoldóinak megemlítését (néha ez úgyis megoldhatatlan feladat).

szér egybevágó a pontrendszerrel! (A feladat könnyű, de nem annyira, mint az első ránézésre látszik.)

c) Hogyan kell egy adott a és b oldalú téglalapba n darab pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebbi pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?

Vizsgáljuk meg az $a=b=1$ és $n=3$ esetet! Az első lépésként a három pontot vigyük ki a négyzet határára! Vegyük a pontok konvex burkát! Ha egy pont a négyzet belsejében van, akkor ezt a pontot a másik két pont összekötő szakaszára merőlegesen, ettől távolítva mozgatva a pontok közötti távolság nő. Így e pont a határra tolható, s ugyanígy a másik két pont is. E műveletek során a pontok közötti legkisebb távolság nem csökkent. Második lépésként elérjük, hogy a négyzet minden oldala tartalmazzon egy pontot. Ha egy oldalon nem volt pont, akkor egy hozzá legközelebb levő pontot erre az oldalra merőlegesen toljunk rá! Ennek a műveletnek legfeljebb háromszori alkalmazásával minden oldalon lesz pont, azaz az egyik pont biztosan négyzetcsúcson van. Jelöljük ezt a négyzetcsúcsot A -val, a többi csúcsot B -vel, C -vel és D -vel! Legyen továbbá AEF olyan szabályos háromszög, amelynek az E , ill. F csúcsa a négyzet BC , ill. CD oldalán helyezkedik el (1. ábra)!

Azt kívánjuk megmutatni, hogy az extrémális elrendezésben a három pont az A , E és F pontokban helyezkedik el. Jelöljük az AE szakasz hosszát d -vel! Az előzők alapján már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha a BC oldalon levő P_1 pont vagy a CD oldalon levő P_2 pont nem az E , ill. F pontban van, akkor az A, P_1, P_2 pontok távolságainak valamelyike kisebb d -nél. Ha a P_1 pont a B pontban vagy a BE szakasz belsejében helyezkedik el, akkor az $AP_1 < AE = d$ miatt készen vagyunk. Ugyanez a helyzet, ha a P_2 pont D -ben vagy a DF szakasz belsejében van. Ezért már csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor a P_1 pont az EC szakaszon, ill. a P_2 pont az FC szakaszon helyezkedik el. Ebben az esetben könnyen látható, hogy ha a P_1 és P_2 pont valamelyike is különbözik az E , ill. F pontoktól, akkor $P_1P_2 < EF = d$.

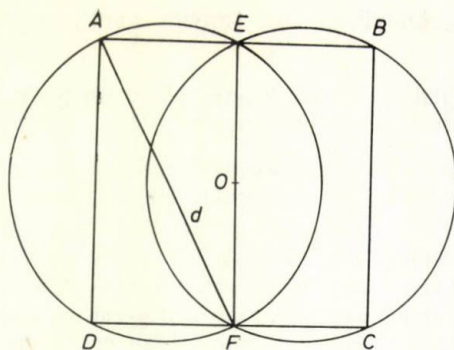


1. ábra

2. Gyakorlat. Hogyan kell egy négyzetbe $n=5$ pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebbi pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?

3. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy a c) feladattal egyenértékű a következő feladat: egy alkalmas téglalapban keressük meg az olyan, n egybevágó körből álló elhelyezést, amelyben a körök sugara a lehető legnagyobb!

Az F alakzat körfedésének nevezünk egy körrendszert, ha az F alakzat minden pontja hozzátartozik valamelyik körrendszerbeli körhöz. Általában a fedési problémák nehezebbek, mint az elhelyezési problémák. Például egy N négyzetet fedjünk le két minimális sugarú, egybevágó körrel! Legyen az $ABCD$ négyzet AB és CD oldalának felezőpontja E , ill. F (2. ábra)! Az AF távolságot jelöljük d -vel! Az $AEFD$ és az $EBCF$ téglalapok lefedhetők d átmérőjű körökkel. Megmutatjuk, hogy másfajta



2. ábra

fedéshez d -nél nagyobb átmérőjű körökre van szükség. Tegyük fel, hogy a négyzetet lefedtük a K_1 és K_2 körökkel! Jelöljük a két kör hatványvonalát (közös pontjaikon átmenő egyenest) k -val! A k egyenes a négyzetet két részre vágja. Az egyik részt (N_1) teljes egészében lefedi a K_1 kör, a másik részt (N_2) a K_2 kör. Tegyük fel, hogy a N_1 rész tartalmazza a N négyzet középpontját! Könnyen belátható, hogy N_1 átmérője nagyobb, mint d , hacsak N_1 nem egybevágó $AEFD$ -vel. Mivel a K_1 kör átmérője legalább akkora, mint N_1 -é, ezért ezzel igazoltuk, hogy N -t fedő minimális átmérőjű két kör esetén az átmérő d .

4. Gyakorlat. Egy szabályos háromszöget fedjünk le két minimális, egyenlő sugarú körrel!

5. Gyakorlat. Egy kört fedjünk le $n=4$, ill. 7 minimális, egyenlő sugarú körrel!

A körnek $n=5$ és 6 körrel való fedése sokkal nehezebb feladat, mint az $n=4$ és 7 esetek.

Az itt bemutatott feladatok megfelelőit vizsgálhatjuk a gömbfelületen, ill. a hiperbolikus síkon is. Így újabb problémákhoz jutunk, amelyeknek nehézségi foka még attól is függhet, hogy mekkora alakzatot próbálunk lefedni, ill. benne köröket elhelyezni. A gömbi, ill. hiperbolikus geometriában járatos kollégáknak ajánljuk, hogy a feladatok euklideszi megoldása után esetleg gömbi vagy hiperbolikus geometriában is próbálják megoldani azok némelyikét. A feladatmegoldások közlésekor szeretnénk még röviden visszatérni a már megoldott esetek ismertetésére és speciális szakmai hivatkozásokra.

IRODALOM

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Regular Figures*. Oxford—London—New York—Paris, 1964.

HEPPES ALADÁR—MOLNÁR JÓZSEF: *Újabb eredmények a diszkrét geometriában I—II—III*. Matematikai Lapok 11, (4) 1960—13, (1—2) 1962—16, (1—2) 1965.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

1. Hogyan kell egy R sugarú körbe $n=6$, ill. 7 egybevágó kört úgy elhelyezni, hogy a körök elhelyezést alkossanak, és a sugaruk a lehető legnagyobb legyen? (Adjuk meg a legjobb elrendezéseket, és igazoljuk, hogy azok valóban a legjobbak!)
2. Hogyan kell egy R sugarú körbe $n=8$ pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebb levő pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?
3. Hogyan kell egy négyzetbe $n=4$ pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebb levő pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?

4. Hogyan kell egy adott 1 és a oldalú téglalapba $n=3$ pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebbi pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?
5. Hogyan kell egy adott 1 és a oldalú téglalapba $n=4$ pontot úgy elhelyezni, hogy a legközelebbi pontok távolsága a lehető legnagyobb legyen?
6. Egy szabályos háromszöget fedjünk le három minimális, egyenlő sugarú körrel!
7. Egy adott 1 és a oldalú téglalapot fedjünk le $n=4$ minimális, egyenlő sugarú körrel! (Speciális a értékekre is elfogadunk megoldást.)
8. Egy kört fedjünk le $n=8$ minimális, egyenlő sugarú körrel!

SZERÉNYI TIBOR
főiskolai docens
Szeged

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1983. évi matematikai tanulmányi versenyéről I.

A négy tanárképző főiskola (Eger, Nyíregyháza, Szeged, Szombathely), valamint az ELTE Tanárképző Főiskolai Kara és a Janus Pannonius Tudományegyetem Főiskolai Kara matematikaszakos hallgatóinak 1983. évi tanulmányi versenye Szegeden, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán április 23-án és 24-én került megrendezésre. A versenybizottság összetétele a következő volt:

elnök: Hódi Endre, OPI;

titkár: Szerényi Tibor, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola;

tagok: Darvasi Gyula, Bessenyei György Tanárképző Főiskola;

Kamarás Lajos, JPTE Főiskolai Kar;

Pogács Ferenc, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar;

Sebestyén József, Szombathelyi Tanárképző Főiskola;

dr. Szepessy Bálint, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola.

A versenyen mindegyik intézményből 5-5 hallgató vett részt. A kitűzött 7 feladatot az intézmények által javasoltakból a versenybizottság elnöke választotta ki.

A kitűzött feladatok

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha n olyan természetes számot jelöl, amely 3-mal osztható, vagy 3-mal osztva maradékul 1-et ad, akkor

$$2n^{662} - 2n^{661} + 1320n^2 - 1320n$$

osztható 1983-mal!

2. feladat

Szerkesszük meg a hegyesszögű háromszöget, ha ismerjük magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképeit!

3. feladat

Bontsuk fel az

$$x^8 + 98x^4y^4 + y^8$$

trinomot két, egész együtthatós polinom szorzatára!

4. feladat

Jelentse α, β és γ egy háromszög szögeinek mérőszámát!
Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) + \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) > \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

5. feladat

Számítsuk ki az $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-9}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, +3\}$)

függvény 1983. differenciálhányadosának értékét az $x=0$ pontban!

6. feladat

Hat olyan egybevágó rombusz, amelyeknek hegyesszögei nagyobbak 60° -nál, két különböző paralelepipedont zárhat közre.

Jellemezzük ezeket a paralelepipedonokat, és számítsuk ki a térfogatukat!

7. feladat

Legyen $u(4) = 1$ és $u(k) = \left\lfloor \frac{k}{k-2} \cdot u(k-1) \right\rfloor$,

ha k 4-nél nagyobb természetes számot jelent; továbbá $[x]$ jelöli az x valós szám ún. „felső” egészrészét, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely nem kisebb x -nél.

Konvergens-e a $\{v(k)\} = \left\{ \left(\frac{k}{2}\right)^{-1} \cdot u(k) \right\}$ sorozat, és ha igen, akkor mennyi a határértéke?

A versenyzők dolgozatukat április 23-án 8 órától 13 óráig írták, utána autóbusz-kirándulást tettek Ópusztaszerre. A dolgozatok értékelését a versenybizottság 23-án délután és 24-én végezte. Ezt követően került sor a verseny eredményének kihirdetésére. A versenyzők által elért eredmények:

I. díjat nyert

Ambrus Gabriella, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar;
Henczi Béla, JPTE Főiskolai Kar;

II. díjat nyert

Bokor József, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola;
Kiss Zoltán, JPTE Főiskolai Kar;

III. díjat nyert

Horváth Katalin, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola;
Máté Bálint, JPTE Főiskolai Kar;
Steierlein István, JPTE Főiskolai Kar;

dicséretben részesült

Antal Csaba, Bessenyei György Tanárképző Főiskola;
Elblinger Ferenc, JPTE Főiskolai Kar;
Holzer Alfréd, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola;
Mészáros Mihály, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola;
Németh Csilla, Szombathelyi Tanárképző Főiskola;
Sóti Judit, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola.

A két elsődíjas hallgató a Bolyai János Matematikai Társulattól 600—600 Ft, a két másodíjdias 400—400 Ft különdíjban is részesült.

1. feladat

Mivel 1983 prímtényezősz felbontása: $1983 = 3 \cdot 661$, azért azt kell belátni, hogy $3k$ vagy $3k+1$ alakú n esetén

$$N = 2n^{662} - 2n^{661} + 1320n^2 - 1320n$$

osztható 3-mal és 661-gyel. Azonban N így írható:

$$N = 2n^2(n^{660} + 660) - 2n(n^{660} + 660) = 2n(n-1)(n^{660} + 660).$$

Fermat tétele szerint n^{660} osztva 661-gyel maradékul 1-et ad, ezért az utolsó tényező osztható 661-gyel, az $n(n-1)$ szorzat pedig 3-mal, ha n $3k$ vagy $3k+1$ alakú. Sőt, N fenti alakjából az is következik, hogy N osztható $4 \cdot 1983$ -mal is.

2. feladat

Jelölje A, B, C a háromszög csúcsait, a, b, c az oldalait, M a magasságpontját és M_a, M_b, M_c a magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükörképeit! A feladat megoldásának kulcsa annak felismerése, hogy az M_a, M_b, M_c pont rajta van az ABC háromszög köré írt körön.

Ugyanis pl. az $ABM_a \sphericalangle$ annyival nagyobb az $ABC \sphericalangle$ -nél, amennyivel a $BAM_a \sphericalangle$ kisebb a $BAC \sphericalangle$ -nél, következésképpen

$$\angle ACB \sphericalangle = \angle AM_aB \sphericalangle$$

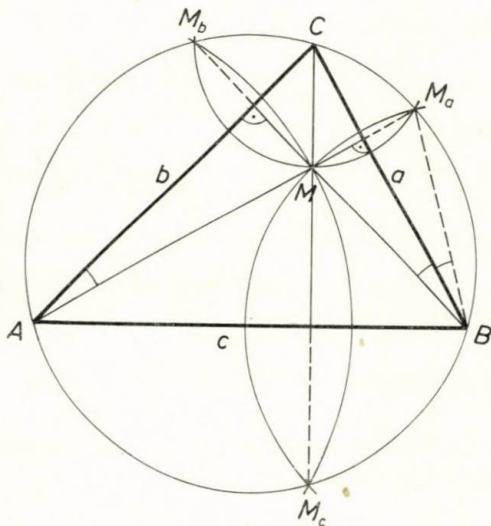
(1. ábra), ezért a kerületi szögek tétele alapján az M_a pont rajta van az A, B, C pontokon átmenő körön. Hasonlóan látható ez be az M_b és M_c pontról.

A mondottakból viszont az következik, hogy az M_a, M_b, M_c pontokon átmenő körön rajta kell lenniük a háromszög csúcsainak, és azok az M_a, M_b, M_c pontok által meghatározott ívek felezőpontjai, mert

$$AM = AM_b = AM_c,$$

$$BM = BM_c = BM_a,$$

$$CM = CM_a = CM_b.$$



1. ábra

Ugyancsak a kerületi szögek tétele alapján könnyen beláthatjuk, hogy a kapott ABC háromszögnek AM_a, BM_b, CM_c a magasságvonala, és M_a, M_b, M_c rendre az M magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükörképe.

3. feladat

Nyilvánvaló átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^8 + 98x^4y^4 + y^8 &= (x^4 + y^4)^2 + 96x^4y^4 = (x^4 + y^4)^2 + 16x^2y^2(x^4 + y^4) + 64x^4y^4 - \\ &- 16x^2y^2(x^4 + y^4) + 32x^4y^4 = (x^4 + y^4 + 8x^2y^2)^2 - 16x^2y^2(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) = \\ &= (x^4 + y^4 + 8x^2y^2)^2 - (4xy(x^2 - y^2))^2 = \\ &= (x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 - 4xy^3 + y^4)(x^4 - 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 + y^4). \end{aligned}$$

Megjegyzés. Valamivel hosszabb, de konstruktívabb a megoldás, ha a határozatlan együtthatók módszerével — szimmetriaokokból —

$$(x^4 + ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + y^4)(x^4 + Ax^3y + Bx^2y^2 + Cxy^3 + y^4)$$

alakú felbontással próbálkozunk. A megfelelő együtthatók összehasonlításából a, b, c, A, B, C -re adódó egyenletek lehetséges megoldásait viszonylag egyszerűen megkaphatjuk.

4. feladat

Először bizonyítsuk be a

$$(1) \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) > \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{2}$$

egyenlőtlenséget!

Mivel $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, azért a bizonyítandó egyenlőtlenség így is írható:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) > \frac{\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{2}.$$

Ez pedig a $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ összefüggés alapján a következővel egyenértékű:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) > \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos \frac{\alpha}{2},$$

azaz

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) > 0,$$

és ez igaz, mert $\frac{\alpha}{2} + \beta < \pi$ miatt a bal oldal mindkét tényezője pozitív.

Minthogy α a háromszög bármelyik szögét jelenthette, azért ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy

$$(2) \quad \sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) > \frac{\sin \gamma + \sin \alpha}{2}, \quad (3) \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) > \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}.$$

(1), (2), (3) megfelelő oldalainak összeadásával megkapjuk a feladatban kitűzött egyenlőtlenséget:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) + \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) > \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$



Rovatvezető: Pogács Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II/10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtjuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A meg-

oldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertettjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1071. Bizonyítsuk be, hogy minden 2-vel, 3-mal és 5-tel nem osztható természetes egésznek van olyan többszöröse, amelynek minden számjegye 1.

Kárteszi Ferenc, Budapest

1072. Az $ABCD$ deltoidban $AB=AD=a \leq b=BC=CD$, $AC=c$, a beírható kör sugara r . Bizonyítsuk be, hogy ha a négyszög húrnégyszög és a köré írható kör sugara R , akkor

$$\frac{c-b}{2} \leq R-r \leq \frac{c-a}{2}$$

és

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}!$$

Takács Dezső, Egyházaskozár

1073. Legyen $m=6k+5$ pozitív, összetett szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik m -nek két olyan m_1, m_2 valódi osztója, amelyekre teljesül: ha p olyan egészegyütthatós polinom, amelyre $p(m)$ a 6-nak többszöröse, akkor a $p(m_1)$ és $p(m_2)$ is 6-nak többszöröse!

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

1074. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 1$ egészre

$$\log_n(\sqrt{2}+1)$$

irracionális!

Spissich László, Pápa

1075. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(a+2)^x + (a-1)^x = (a+1)^x + a^x$$

egyenletet, ahol $a \geq 2$ rögzített valós szám!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1076. Jelölje $\sigma(n)$ az n pozitív egész osztóinak az összegét. Bizonyítsuk be, hogy az $x_n = \frac{\sigma(n)}{n}$ elemekből álló sorozatban végtelen sok k -ra, illetve m -re

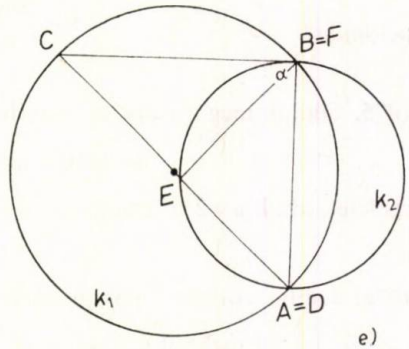
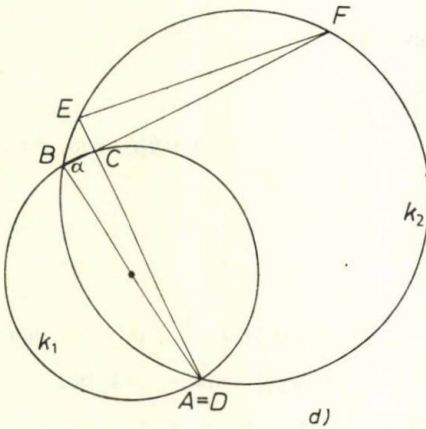
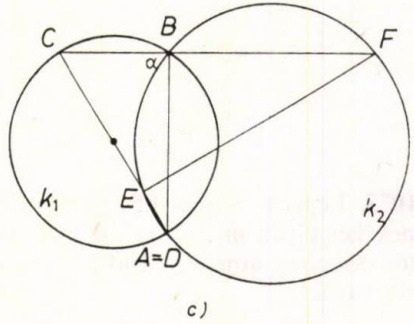
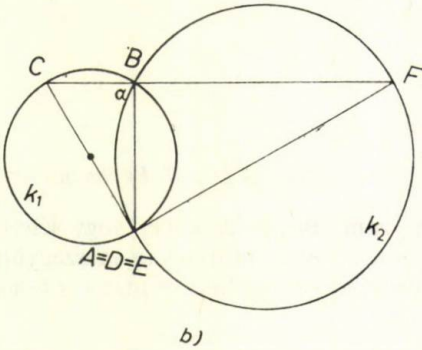
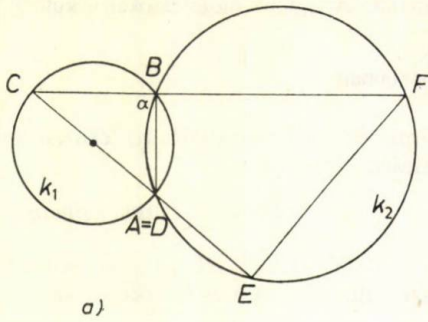
$$x_k < x_{k+1} \quad \text{illetve} \quad x_m > x_{m+1}$$

Sándor József, Szeben

Feladatmegoldások (1047—1052.)

1047. A k_1 és a k_2 körök egymást az A és B pontban metszik. A k_1 kör tetszőleges, A és B pontoktól különböző C pontján átmenő CA és CB egyenesek a k_2 kört másodjára E , illetve F pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy EF merőleges a k_1 kör CD átmérőjére!

Megoldás: Vezessük be az $\angle ABC = \alpha$ jelölést és vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a D és a két kör közös metszéspontja közül az egyik, az A pont azonos (1. ábra).



1. ábra

Ekkor $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Az 1.e) esetben EF a DEF derékszögű háromszög egyik befogója, ezért valóban

$EF \perp DC$. A másik négy: $\angle FBA = \alpha = \frac{\pi}{2}$. Az 1.b) esetben a k_1 kör D -beli érintője a k_2 kör DF átmérője lesz, ezért EF valóban merőleges a k_1 D -n átmenő érintőjére, CD -re.

A másik három esetben (1.a), c), d) ábrák), Thalesz tételének megfordítása miatt, DF a k_2 kör egy átmérője lesz, így e kör DEF kerületi szöge ezen esetekben is derékszögű, tehát $EF \perp DC$.

A további eset (D nem esik egybe a két kör egyik közös pontjával sem) lehetőségeit a 2. ábra szemlélteti.

Az α szög a k_1 kör AC ívéhez tartozó kerületi szög, így, attól függően, hogy D a k_1 kör B -t tartalmazó AC ívén van, vagy ennek komplementerén, a kerületi szögek tétele alapján $\angle ADC = \alpha$ vagy $\angle ADC = \pi - \alpha$ (2.e) ábra).

A k_2 körben az $\angle ABC$ az AF ívhez tartozó kerületi szög, így az ugyanezen ívhez tartozó $\angle FEA$ kerületi szög α , illetve a 2.b) ábra esetében $\pi - \alpha$. Valamennyi esetben, mint azonnal látható, $\angle FEC = \alpha$.

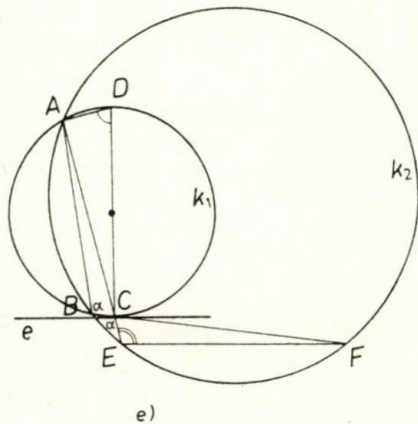
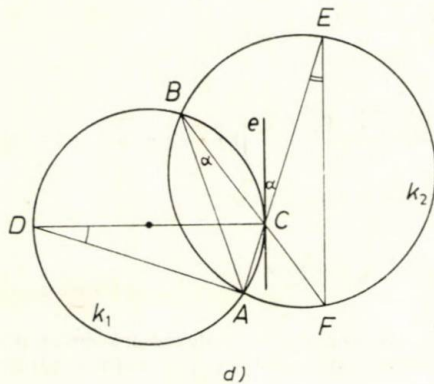
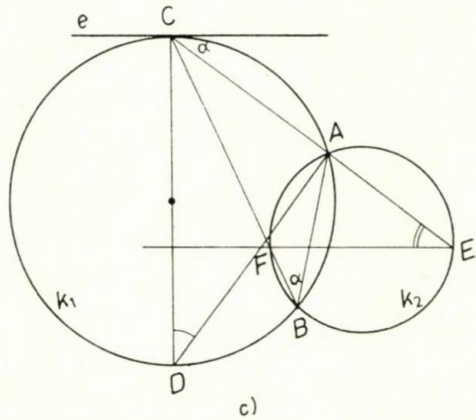
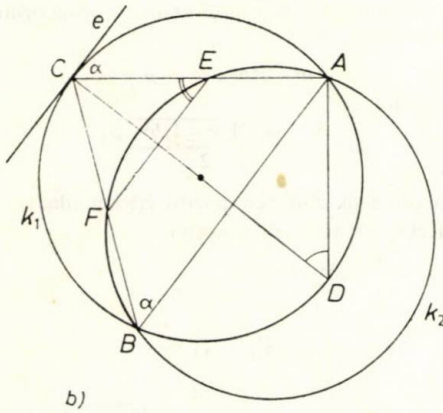
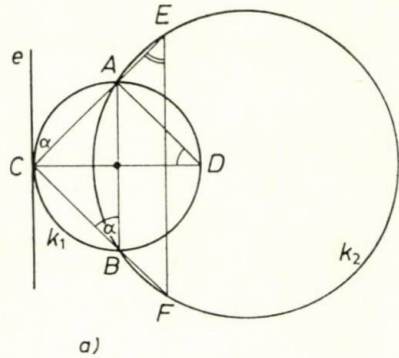
A k_1 kör C pontbeli e érintője egy, az AC ívhez tartozó érintőszáru kerületi szöget ad, melynek húrja az AC , és e szög α -val egyenlő. Az ábrákról leolvashatóan ez az α szög és az $\angle FEC$ váltószögek, illetve a 2.e) esetében egyállású szögek, azaz $e \parallel FE$, tehát EF valóban merőleges a k_1 kör C pontjához tartozó, e -re merőleges átmérőre.

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 33

1048. Határozzuk meg azokat az (a, b) szám-párokat, amelyekre az $a^4 + a^2b^2 + b^4$ prímszám!

Varga István, Nagyszalonta



2. ábra

Megoldás: Először tegyük fel, hogy a és b egyaránt egész szám. Vegyük észre, hogy ha egy pozitív egészből álló (a, b) számpár megfelel, akkor a $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$ is ilyen. Elég tehát a pozitív számpárokat felkutatni (ha $ab=0$ lenne, akkor kifejezésünk egy egész szám negyedik hatványa, ami nem lehet prímszám).

Szoroztató bontva kifejezésünket:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2),$$

a nyert két tényező mindegyike pozitív egész kell legyen, s ezért az

$$a^2 - ab + b^2 = 1,$$

$$a^2 + ab + b^2 = \text{prim}$$

feltételeket kapjuk. Az elsőből

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(b^2 - 1)}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2}.$$

A $4 - 3b^2 \geq 0$ miatt, b egyetlen lehetséges pozitív egész értéke az 1. A $b=1$ esetén $a=1$ vagy $a=0$. Fentebbi megjegyzésünk figyelembevételével — mivel kifejezésünk az $(1, 1)$ számpárra 3, tehát prim — az egész számok közül, csakis az $|a|=|b|=1$ feltételnek eleget tevő

$$(1; 1); (-1; 1); (1; -1); (-1; -1)$$

számpárok teljesítik feltételünket.

Legyen most a és b valós szám, p pedig prímszám. Ekkor az

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = p$$

feltételből

$$a^2 = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4(b^4 - p)}}{2}$$

(a másik gyök a^2 -re nem pozitív értéket adna).

Két feltételnek kell teljesülnie:

$$(1.) \quad b^4 - 4(b^4 - p) \geq 0$$

és

$$(2.) \quad -b^2 + \sqrt{b^4 - 4(b^4 - p)} \geq 0.$$

Ezekből $b^4 \leq \frac{4}{3}p$ és $b^4 \leq p$ kell legyen, azaz $|b| \leq \sqrt[4]{p}$. Legyen $0 \leq r \leq p$ és $b^2 = \sqrt{p-r}$. Ekkor

$$a^2 = \frac{-\sqrt{p-r} + \sqrt{p+3r}}{2} \geq 0.$$

Könnyen látható, hogy ezekre

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = \left(\frac{-\sqrt{p-r} + \sqrt{p+3r}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{p-r} + \sqrt{p+3r}}{2} \right) \sqrt{p-r} + p - r = p.$$

Ezekkel beláttuk, hogy tetszőleges p prímszám és $0 \leq r \leq p$ valós esetén az

$$|a| = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{p+3r} - \sqrt{p-r}}{2}} \quad \text{és} \quad |b| = \sqrt[4]{p-r}$$

feltételnek eleget tevő (a, b) , $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$ számpárookra kifejezésünk értéke a p prim szám. Mivel a $[0, p]$ intervallumban kontinuum sok r valós szám van, ezért ennyi megfelelő (a, b) pár van minden p prímszámhoz.

Udvari Tibor, Baja

Megjegyzés: Az $a \geq b \geq 0$ és az $a = \sqrt[4]{x}$, $b = \sqrt[4]{y}$ helyettesítéssel kifejezésünkéből az

$$x^2 + xy + y^2 - p = 0$$

egyenletet kapjuk. Az ezt kielégítő (x, y) értékpárok a síkban minden $p > 0$ esetén egy olyan ellipszis pontjait adják, melynek félnagy tengelye $\sqrt{2p}$, félkistengelye $\sqrt{\frac{2}{3}p}$ és ezek a koordináta-tengelyek szögfelezőin vannak (3. ábra).

Feltételeink az ellipszis első síknegyedbeli pontjai közül azokat adják, amelyekre

$$\sqrt[4]{p} \geq x = a^2 \geq \sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{p}{3}} \geq y = b^2 \geq 0.$$

Ezen pontoknak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükröke a $0 \leq a \leq b$ feltételnek eleget tevő számpárokat adja.

Az ellipszis harmadik negyedbeli pontjai adják a negatív a , illetve b értékeket. Mivel kifejezésünkben a és b páros kitevőjű hatványai szerepelnek, ezért az ellipszis többi pontja nem ad megoldást.

Összegezve: Minden p prímszámhoz és $b \leq \sqrt[4]{p}$ értékhez találhatunk az

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - p = 0,$$

a -ban másodfokúra redukálható negyedfokú egyenlet megoldásával — amely a fenti feltételekkel mindig ad megoldást — olyan a értékeket, amely (a, b) számpárokat adja kifejezésünk prím.

Azoknak az eseteknek a száma is végtelen, amelyekben x és y egész. Példának okáért az $a = \sqrt[4]{3}$, $b = \sqrt[4]{2}$ esetén $p = 17$; ha $a = \sqrt[4]{27}$ és $b = \sqrt[4]{8}$, akkor $p = 1009$.

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 27.

1049. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\left[\frac{x^2 - 3x + 2}{15} \right] + \left[\frac{x^2 - 3x + 7}{15} \right] + \left[\frac{x^2 - 3x + 12}{15} \right] = \frac{7x - 1}{8},$$

ahol $[A]$ az A szám egész részét jelöli!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Bármely a szám esetén igaz, hogy $a - 1 < [a] \leq a$, ezt felhasználva, ha valamely x szám gyöke az egyenletnek, arra teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségrendszernek:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{15} - 1 + \frac{x^2 - 3x + 7}{15} - 1 + \frac{x^2 - 3x + 12}{15} - 1 &< \frac{7x - 1}{8} \leq \frac{x^2 - 3x + 2}{15} + \\ &+ \frac{x^2 - 3x + 7}{15} + \frac{x^2 - 3x + 12}{15} \end{aligned}$$

Ekvivalens átalakítások segítségével ebből a következőt nyerhetjük:

$$8x^2 - 24x - 64 < 35x - 5 \leq 8x^2 - 24x + 56.$$

Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$8x^2 - 59x - 59 < 0 \quad \text{és} \quad 8x^2 - 59x + 61 \geq 0.$$

Mivel az első, illetve második kifejezésünk zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{59 \pm \sqrt{3481 + 1888}}{16} = \begin{cases} 8,26 \\ -0,89 \end{cases} \quad x_{3,4} = \frac{59 \pm \sqrt{3481 - 1952}}{16} = \begin{cases} 6,13 \\ 1,24 \end{cases}$$

ezért első egyenlőtlenségünknek a

$$-0,89 < x < 8,26,$$

míg a második egyenlőtlenségnek az

$$x \leq 1,24 \quad \text{vagy} \quad x \leq 6,13$$

számok tesznek eleget.

A két egyenlőtlenség megoldásának közös része:

$$-0,89 < x \leq 1,24 \quad \text{vagy} \quad 6,13 \leq x < 8,26.$$

Tudjuk, hogy az eredeti egyenlet bal oldalán három egész szám összege áll, így a jobb oldalnak is egésznek kell lennie. Ez akkor teljesül, ha $x = \frac{1+8k}{7}$ alakú, ahol k egész szám. Kaptuk, hogy

$$-0,89 < \frac{1+8k}{7} \leq 1,24 \quad \text{vagy} \quad 6,13 \leq \frac{1+8k}{7} < 8,26.$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal nyerhetjük:

$$-0,9 < k \leq 0,96 \quad \text{vagy} \quad 5,23 \leq k < 7,1.$$

Mivel k egész szám, ezért csak a következő megoldásai lehetnek a feladatnak:

$k_1=0$ vagy $k_2=6$ vagy $k_3=7$, azaz $x_1=\frac{1}{7}$ vagy $x_2=7$ vagy $x_3=\frac{57}{7}$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az első kettő szám gyöke az eredeti egyenletnek, a harmadik pedig nem.

Tehát az egyenlet megoldása: $x_1=\frac{1}{7}$ és $x_2=7$.

Polcz Katalin, Pécs

Megjegyzés: Felhasználva a $[na]=[a]+\left[a+\frac{1}{n}\right]+\left[a+\frac{2}{n}\right]+\dots+\left[a+\frac{n-1}{n}\right]$ azonosságot (lásd: Érdekes matematikai gyakorló feladatok, VI. kötet, 166., 215.), $n=3$ -ra feladatunk a

$$\left[3 \cdot \frac{x^2-3x+2}{15}\right] = \left[\frac{x^2-3x+2}{5}\right] = \frac{7x-1}{8}$$

alakot ölti. Ennek megoldása fentiekhez hasonlóan történhet.

Ambrus Gabriella, Budapest, Biró Béla, Barót, Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

A megoldók száma: 29.

1050. Legyen $k \geq 1$, természetes egész! Definíáljuk az x_n sorozatot a következőképpen:

$$x_0 = k, \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{ha } x_n \text{ páros} \\ 2x_n + 2, & \text{ha } x_n \text{ páratlan!} \end{cases}$$

Jelentsé $L(k)$ azt a legkisebb m indexet, amelyre $x_m=1$! Bizonyítsuk be, $L(k)$ minden pozitív egészre létezik és $L(k) < 3 \cdot [\log_2 k] + 7$.

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Jól ismert tény, hogy bármely $k \geq 1$ egész egyértelműen írható fel különböző kettőshatványok összegeként: $k = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_t}$,

ahol $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_t$.

Ekkor nyilvánvalóan

$$2^{r_t} \leq k < 2^{r_t+1},$$

amiből

$$r_t \leq \log_2 k < r_t + 1,$$

azaz

$$[\log_2 k] = r_t.$$

Az előző felírásmód figyelembevételével könnyen belátható, hogy létezik olyan legkisebb m index, amelyre $x_m=1$. Valóban, ha k páros, akkor annyi lépés után, amennyi 2-nek a kitevője k -nak törzstényezős felbontásában, páratlan számhoz jutunk. Páratlan számból viszont vagy (egy lépéssel) 2 hatványához jutunk, vagy 3 lépés után a sorozat olyan tagját kapjuk, amelynek a 2-es alapú számrendszerben eggyel kevesebb számjegye van.

Bebizonyítjuk a következő (feladatbelinél élesebb) becslést:

$$L(k) \leq 3 \lfloor \log_2 k \rfloor + 1.$$

Legyen $k \geq 3$ és páratlan egész. Ekkor a rekurziós képletből a második előírást alkalmazzuk, ezután legalább kétszer az első, és így tovább. A kívánt index elérését közvetlenül legalább három felezés előzi meg. Könnyen látható, hogy az eljárás akkor a leghosszabb (tehát $L(k)$ a legnagyobb,) ha a második rekurziós képlet alkalmazása után mindig pontosan kétszer alkalmazzuk az első képletet, kivéve az utolsó fázist, amikor háromszor alkalmazzuk azt. Ekkor az $L(k)$ index $3l+1$, k pedig 2^{l+1} .

Ez utóbbi állítást teljes indukcióval igazoljuk.

$l=1$ esetén $k=3$, erre $x_0=3$, $x_1=8$, $x_2=2$, $x_4=1$, azaz $4=L(3) \leq 3 \lfloor \log_2 3 \rfloor + 1 = 4$ teljesül. Tegyük fel, hogy rögzített $l (\geq 1)$ -re igaz az állítás, azaz $L(2^{l+1}) = 3l+1$.

Ekkor $x_3 = 2^l + 1$, innen pedig $x_2 = 2^{l+1} + 2$, tehát $x_1 = 2^{l+2} + 2 + 2$ és ezért $x_0 = 2^{l+1} + 1$, amit bizonyítani akartunk.

Ha most k páros, tehát $k = 2^s \cdot t$ ($s \geq 1$, $(t; 2^s) = 1$), akkor

$$L(k) \leq s + L(t) \leq s + 3 \lfloor \log_2 t \rfloor + 1 < 3s + 3 \lfloor \log_2 t \rfloor + 1 = 3 \lfloor \log_2 k \rfloor + 1.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Cseh László, Kolozsvár, Csorba Ferenc, Győr, Merényi Imre, Kolozsvár

A megoldók száma: 14.

1051. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ egy konvex n -szög szögei, radiánban mérve. Igazoljuk, hogy

$$\prod_{i=1}^n \sin \alpha_i < \left(\frac{2\pi}{n} \right)^n.$$

Biró Béla, Barót

Megoldás: Felhasználjuk a konkáv $x \mapsto f(x)$ függvényekre ($f'' \leq 0$) vonatkozó Jensen-féle egyenlőtlenséget: ha az $x \mapsto f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon konkáv, akkor minden $a \leq x_i \leq b$ értékre

$$(1) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Ennek geometriai jelentése a következő: A konkáv függvény görbéjén véges sok pont adta homogén pontrendszer súlypontja a görbe alatt van.

Mivel az $x \mapsto \sin x$ függvény a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv, továbbá a konvex n -szög bármely α szöge kisebb π -nél, ezért (1) miatt

$$(2) \quad \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{n}.$$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$, ezért (2) bal oldalán $\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \sin \frac{2\pi}{n}$ áll.

Alkalmazzuk most a (2) jobb oldalára a számtani és mértani középbe vonatkozó egyenlőtlenséget, így

$$(3) \quad \sin \frac{2\pi}{n} = \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n}.$$

Ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin \alpha < \alpha$, tehát (3)-ból

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sin \alpha_i} \leq \sin \frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{n},$$

amiből következik a feladat állítása.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely, Varga István, Nagyszalonta

A megoldók száma: 22.

1052. Határozzuk meg azokat az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre

$$f(x) \cdot \left(\cos y + \frac{f(y)}{2} \right) + f(y) \cdot \left(\cos x + \frac{f(x)}{2} \right) - f(x-y) = \sin x \cdot \sin y.$$

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

Didaktikai céllal több megoldási módot is bemutatunk és mindannyiszor bizonyítjuk, hogy a megoldások csak az $f(x) = -\cos x$ és $f(x) = 1 - \cos x$ függvények. Célszerű a megoldandó függvényegyenletet a következő alakba átírni:

$$(1) \quad f(x-y) = f(x)f(y) + f(x)\cos y + f(y)\cos x - \sin x \cdot \sin y.$$

I. megoldás: Legyen (1)-ben $y=0$ és $a:=f(0)$, ekkor $f(x)=af(x)+f(x)+a\cos x$,
 $a[f(x)+\cos x] = 0$.

Itt két esetet kell megkülönböztetnünk: *A)* vagy minden $x \in \mathbf{R}$ -re $f(x)+\cos x=0$ (ekkor $a=-1$); *B)* ha pedig van olyan x_0 , amelyre $f(x_0)+\cos x_0 \neq 0$, akkor szükségképpen $a=f(0)=0$.

Az *A)*-ből adódó $f(x) = -\cos x$ függvény *megoldás*, mert kielégíti az (1) egyenletet.
B) esetben (1)-ből az $x=y$ helyettesítéssel

$$0 = f(0) = f(x)^2 + 2f(x)\cos x - \sin^2 x, \quad [f(x) + \cos x]^2 = 1$$

adódik, tehát (vigyázat, f nem feltétlenül folytonos!)

$$(2) \quad f(x) + \cos x = e(x), \quad \text{ahol} \quad e(x)^2 = 1.$$

A kapott $f(x) = e(x) - \cos x$ függvényt (1)-be írva

$$e(x-y) - \cos(x-y) = [e(x) - \cos x][e(y) - \cos y] + [e(x) - \cos x]\cos y + \\ + [e(y) - \cos y]\cos x - \sin x \cdot \sin y,$$

azaz egyszerűsítések után

$$(3) \quad e(x-y) = e(x)e(y).$$

Innen pedig az $y=x/2$ helyettesítéssel $e(x/2) = e(x)e(x/2)$, tehát $e(x)=1$, hiszen $e(x)^2=1$ miatt $e(x/2) \neq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ -re igaz. Azt kaptuk (2) alapján, hogy $f(x) = 1 - \cos x$ és ez is megoldás mert kielégíti (1)-et.

II. megoldás: Az (1) egyenlet jobb oldala x és y -ban szimmetrikus, következésképpen $f(x-y) = f(y-x)$, azaz f páros függvény. Ezt kihasználva (1) alapján

$$f(x+y) = f(x-(-y)) = f(x)f(-y) + f(x)\cos(-y) + f(-y)\cos x - \sin x \cdot \sin(-y) = \\ = f(x)f(y) + f(x)\cos y + f(y)\cos x + \sin x \cdot \sin y.$$

Az (1) és (4) egyenletből kapjuk, hogy

$$(5) \quad f(x+y) - f(x-y) = 2\sin x \cdot \sin y,$$

Innen pedig $x=y$ helyettesítéssel

$$(6) \quad f(2x) = 2\sin^2 x + f(0) = b - \cos 2x, \quad \text{ahol} \quad b := 1 + f(0),$$

azaz $f(x) = b - \cos x$. Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve, $b - \cos(x-y) = (b - \cos x)(b - \cos y) + (b - \cos x)\cos y + (b - \cos y)\cos x - \sin x \cdot \sin y$, és egyszerűsítések után látjuk, hogy $b^2 - b = 0$ kell legyen, azaz $b=1$ vagy $b=0$. Következésképpen $f(x) = 1 - \cos x$, illetve $f(x) = -\cos x$ és *mindkét függvény megoldása* (1)-nek.

III. megoldás: A (4) egyenlet megkapása után a következőképpen is eljáráhatunk: Mindkét oldalt növeljük $\cos(x+y)$ -nal és kapjuk, hogy

$$f(x+y) + \cos(x+y) = [f(x) + \cos x][f(y) + \cos y].$$

Innen látható, hogy a $g(x) := f(x) + \cos x$ függvény a

$$(7) \quad g(x+y) = g(x)g(y)$$

(ún. *Cauchy*-típusú) függvényegyenletet elégíti ki. Az $f(x)=g(x)-\cos x$ függvényt (1)-be visszahelyettesítve

$$g(x-y)-\cos(x-y)=[g(x)-\cos x][g(y)-\cos y]+[g(x)-\cos x]\cos y+ \\ +[g(y)-\cos y]\cos x-\sin x\cdot\sin y,$$

azaz egyszerűsítések után

$$(8) \quad g(x-y)=g(x)g(y)$$

is fennáll (ez formailag a (3) egyenlettel azonos, de tartalmilag nem!). Ezért (7) és (8) alapján

$$(9) \quad g(x+y)=g(x-y).$$

Mivel pedig az $x+y=u$, $x-y=v$ egyenletrendszer minden rögzített $u, v \in R$ elempárra R -ben megoldható, ezért (9)-ből $g(u)=g(v)=c$ (konst.) következik. A $g(x)=c$ a (7) [vagy (8)] egyenletet csak akkor elégíti ki, ha $c=0$ vagy $c=1$. Így ismét az $f(x)=-\cos x$ és $f(x)=1-\cos x$ megoldásokat kaptuk.

1. megjegyzés: Az *I. megoldás* egy további változata, ha (1)-ben az $x=y$ helyettesítéssel kezdünk; ekkor

$$[f(x)-\cos x]^2=1+a \quad \text{és} \quad a:=f(0) \geq -1.$$

Innen $f(x)+\cos x=b(x)$, $b(x)^2=1+a$ és (1)-be visszahelyettesítve $b(x-y)=b(x)b(y)$ következik. Ha van olyan rögzített $x_0 \in R$, melyre $b(x_0)=0$, akkor minden $x \in R$ -re;

$$b(x)=b(x+x_0-x_0)=b(x+x_0)b(x_0)=0,$$

tehát (most is) $f(x)=-\cos x$; ha viszont $b(x) \neq 0$ minden $x \in R$ -re, akkor ismét az $y=x/2$ helyettesítéssel érünk célhoz.

2. megjegyzés: A *II. megoldás* egy további variánsa, ha (5)-ből az

$$f(x+y)-f(x-y)=2\sin x\cdot\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y),$$

$$f(x+y)+\cos(x+y)=f(x-y)+\cos(x-y)$$

egyenletet írjuk fel és a $h(x):=f(x)+\cos x$ függvényről a *III. megoldás* végén közölt gondolatmenettel kimutatjuk, hogy $h(x)=c$ (konst.) stb.

3. megjegyzés: A *III. megoldás* egy további változata az, ha rögtön az (1) egyenletet az

$$f(x-y)+\cos(x-y)=[f(x)+\cos x][f(y)+\cos y]$$

alakba írjuk. Itt a jobb oldal x és y -ban való szimmetriájából észrevesszük, hogy a $g(x):=f(x)+\cos x$ páros függvény, tehát f is ilyen, majd ezt kihasználva a (4) egyenlet mintájára a $g(x+y)=g(x-(y-))$ $=\dots=g(x)g(y)$ egyenlethez [vö. (7)] jutunk stb.

4. megjegyzés: Említésre méltó, hogy az f megoldások folytonos volta „automatikusan” adódott anélkül, hogy azt bármelyik megoldásnál is feltettük, illetve kihasználtuk volna.

5. megjegyzés: Ha az f függvény R értelmezési tartományát (és csak ezt) szűkítjük, a megoldásfüggvények általánosabbak is lehetnek. Így nem érdektelen az az észrevétel, hogy a fenti megoldások akkor is érvényesek, ha az f függvény R értelmezési tartományát R^* -ra ($R^* \subset R$) szűkítjük, hogy R^* (még) az összeadásra nézve egy ún. *diadikus kommutatív csoport* maradjon. A „diadikus” jelző itt azt jelenti, hogy a $2x=x+x=k$ egyenletnek minden $k \in R^*$ -ra van R^* -ban megoldása (pl. a racionális számok Q halmaza ilyen, de az egész számok Z halmaza már nem)!

Az R halmaznak ezt a diadikus tulajdonságát mindhárom megoldásnál kihasználtuk: az *I. megoldás*nál az $y=x/2$ helyettesítéssel; a *II. megoldás*nál akkor, amidőn (6) alapján $f(2x)$ -ből $f(x)$ -re következtettünk; a *III. megoldás*nál pedig az $x+y=u$, $x-y=v$ egyenletek megoldhatóságánál, hiszen $x=(u+v)/2$ és $y=(u-v)/2$.

6. megjegyzés: Az előzőekben említett diadikus tulajdonság követelményének elhagyása esetén (1)-nek van más megoldása is! Például az egész számok Z halmazán (7) és (8) közös megoldása [a $g(x)=0$ és $g(x)=1$ megoldásokon kívül] a

$$g(x)=\begin{cases} -1, & \text{ha } x \text{ páratlan,} \\ 1, & \text{ha } x \text{ páros} \end{cases}$$

függvény is. Sőt igaz a következő meglepő tény: van olyan, a számegyenesen *mindenütt sűrű* $\tilde{R}$ (az összeadásra nézve) nem diadikus kommutatív csoport (pl. az $\tilde{R} := \{n + m\sqrt{2}/m, n \in \mathbb{Z}\}$ ilyen), melyen az (1)-et kielégítő $f: \tilde{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *már sehol sem folytonos*. A hosszabb bizonyítást az érdeklődő Olvasóra bízunk, — megjegyezve, hogy a függvény folytonosságának fogalma R bármely, *mindenütt sűrű additív részcsoportjára* a klasszikus folytonossági definíció formális átvételével terjeszthető ki.

7. megjegyzés: Az előző megjegyzés alapján már látható, hogy mily nagy hangsúlyt kap az 1. megoldás során kapott (2) egyenlet. Ha ugyanis (2) helyett a „szokásos” (csak folytonos f -re igaz) $f(x) + \cos x = 1$ és $f(x) + \cos x = -1$ eseteket tekintettük volna, akkor (ez utóbbról kiderül, hogy nem megoldás és) „látszólag minden mellékfeltétel nélkül” kaptuk a két megoldást (és csak ezeket), a további, nem diadikus kommutatív csoportokon érvényes megoldások pedig „elsikkadnak”.

Vincze Endre, Miskolc

A megoldók száma: 24.

A megoldók névsora (1947—1952.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1947—1950.); Bagi Gábor, Barcs (1947., 1948.); Bencze Mihály, Brassó (1947—1952.); Bíró Béla, Barót (1947—1949., 1951., 1952.); Bíró László, Székelyudvarhely (1947—1952.); Boda Miklós, Pécs (1951.); Bokor József, Szeged (1949—1951.); Cseh László, Kolozsvár (1947. 2. mód, 1948—1952.); Csorba Ferenc, Győr (1947—1952.); Deák Imre, Székelyudvarhely (1948., 1951., 1952.); Földeák Árpád, Budapest (1947.); Giczi Margit, Sümeg (1947., 1949.); Hajna János, Pécs (1947—1952.); Hársptakiné Dékány Veronika, Budapest (1948., 1949.); Honti Dénesné, Győr (1947—1949., 1952.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1947—1952.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1947—1949., 1951., 1952.); Kondor Judit, Budapest (1947., 1948., 1951., 1952.); Kulcsár Károlyné, Szücsi (1947.); Kun Péter, Szentendre (1947.); Dr. Major Pál, Budapest (1947., 1949.); Merényi Imre, Kolozsvár (1947—1952.); Mészáros József, Galánta (1947., 1949., 1951., 1952.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1947., 1948.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1951.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1947.); Náfrádi Ferenc, Győr (1947., 1951.); Németh László, Vasvár (1948., 1949.); Nyíró László, Mezőkövesd (1948., 1949.); Papp Ferenc Ann Arbor, USA (1952.); Pataki János, Szatmár (1947—1949., 1951., 1952.); Polcz Katalin, Pécs (1947—1950., 1952.); Rischákré Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1947—1949., 1952.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1947., 1949.); Simon József, Csíkszereda (1947—1949.); Spissich László, Pápa (1947., 1950—1952.); Szabó Péter, Dévaványa (1949., 1952.); Szánthó Gyula, Gyula (1947—1949., 1951.); Udvari Tibor, Baja (1947—1952.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1947—1952.); Varga István, Nagyszalonta (1947—1949., 1951. 2. mód, 1952.); Vincze Endre, Miskolc (1952.); Zábrádiné Schmierer Emília, Győr (1947—1949., 1952.).

ÚJ KÖNYVEK

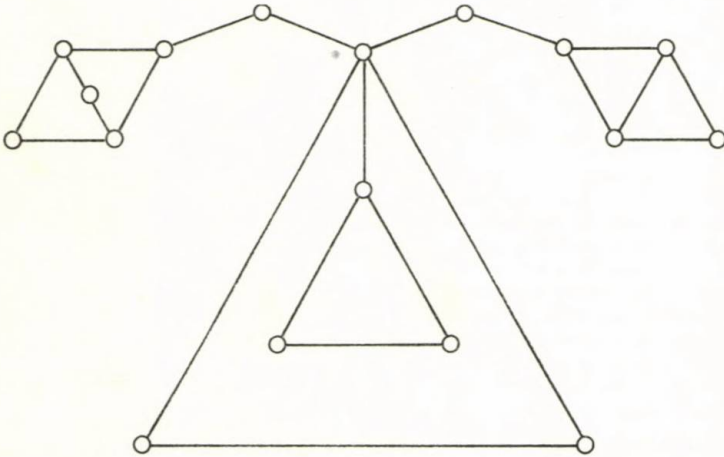
- ALCOCK, DONALD: *Ismerd meg a BASIC nyelvet!* (4. kiadás) Budapest, 1984, Műszaki Könyvkiadó, 167 oldal, 60,— Ft.
- ALEXITS, GEORGE: *Approximation Theory*. Budapest, 1983, Akadémiai Kiadó, 297 oldal, 330,— Ft.
- BALÁZSNÉ MÉHES VERA: *Szám-lépcső* (2. kiadás). Budapest, 1984, Móra Könyvkiadó, 28,— Ft.
- GÉCSEG FERENC—MAGNUS STEINBY: *Tree automata*. Budapest, 1984, Akadémiai Kiadó, 234 oldal, 295,— Ft.
- KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához*. Budapest, 1984, Tankönyvkiadó, 436 oldal, 52,— Ft.
- KUZNECOV, B. G.: *Filozófiatörténet fizikusoknak és matematikusoknak*. Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 469 oldal, 57,— Ft.
- LUKÁCS OTTÓ: *Gyerekmatek, Utazások Matematikaországban*. Budapest, 1983, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 17,— Ft.
- MOGYORÓDI, J.—VINCZE, I.—WERTZ, W. (editors): *Statistics and probability*, Budapest, 1984, 415 oldal, 450,— Ft.
- RUZSA IMRE: *Klasszikus, modális és intenzionális logika*. Budapest, 1984, Akadémiai Kiadó, 411 oldal, 98,— Ft.
- TERMÉSZETTUDOMÁNYI KISENCIKLOPÉDIA (2., átdolgozott kiadás). Budapest, 1983, Gondolat Könyvkiadó, 980 oldal + 48 oldal fekete és 16 oldal színes melléklet, 200,— Ft.

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



1984. október * XXXI. évfolyam

5

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁS

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.

Telefon: 211-200

84-3353 — Szegedi Nyomda — F.v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkészítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalvá-
nyon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi
jelzőszámára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Szíveskedjenek közölni a következő adato-
kat is: a) személyi számukat, b) az asszonyok
leánykori nevüket is, c) lakáscímüket — irányí-
tószámmal, d) foglalkozásukat (beosztásukat),
e) munkahelyük pontos megnevezését, f) mun-
kahelyük címét irányítószámmal.

TARTALOM

<i>Fehér Károly</i> : A PTK 1050 típusú zseb- számológép az általános iskolában....	129
<i>Dr. Koncz József</i> : Számítástechnika a szako- sított matematika-tanterv alapján tanuló általános iskolai 5. osztályokban....	132
<i>Dr. Ambrus András—Dr. David Gunter</i> : Bi- zonyítási stratégiák az iskolai matemati- kaoktatásban	135
<i>Dr. Rédling Elemér</i> : Megjegyzések egy cikk- hez	143
<i>Dr. Andrásfai Béla</i> : Hamisból minden kö- vetkezik	146
<i>Lukács Ottó</i> : A folyamatábrákról	150
FELADATOK	156
Új könyvek	III.
ORGTECHNIK HUNGARIA BUDAPEST '84	IV.

INHALT

<i>Fehér, Károly</i> : Der elektronische Taschen- rechner vom Typ PTK 1050 in der Grundschule	129
<i>Dr. Koncz, József</i> : Die Rechentechnik in den 5. Klassen der Grundschule, wo die Mathematik nach einem spezialisierten Lehrplan unterrichtet wird	132
<i>Dr. Ambrus, András—Dr. Gunter David</i> : Be- weisstrategien im schulischen Mathema- tikunterricht	135
<i>Dr. Rédling, Elemér</i> : Bemerkungen zu einem Aufsatz	143
<i>Dr. Andrásfai, Béla</i> : Aus einer falschen Aus- sage kann man auf alles folgern.....	146
<i>Lukács, Ottó</i> : Über die Flußdiagramme..	150
AUFGABEN	156
Neue Bücher	III.
ORGTECHNIK HUNGARIA BUDAPEST '84	IV.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Фехер Карой</i> : Карманная вычислитель- ная машина типа PTK 1050 в началь- ной школе	129
<i>д-р Конц Йозсеф</i> : Вычислительная техни- ка в пятом классе начальной школы, специализированной по математичес- кому учебному плану	132
<i>д-р Амбруш Андраш—д-р Давид Гунтер</i> : Стратегии доказательства в обучении математики в школе	135
<i>д-р Редлинг Элемер</i> : Замечания к одному статье	143
<i>д-р Андрашфай Бела</i> : Из неверного сле- дует все	146
<i>Лукач Отто</i> : О схемах процессов	150
ЗАДАЧИ	156
Новые книги	III.
ORGTECHNIK HUNGARIA Будапешт '84	IV.

A matematikatanítás

MÓDSZERE

FEHÉR KÁROLY
szakfelügyelő
Derecske

A PTK 1050 típusú zsebszámológép az általános iskolában

Ez a programozható tudományos kalkulátor 10 memóriával rendelkezik és 50 lépésre programozható. Az V. sz. Tanszerjegyzék alapján az 1982. évre beszerzésre ez a zsebszámológép az előírt, 1 db iskolánként, optimálisan matematikatanáronként.

A számítástechnika rohamos előretörése idején az elemeinek megismerése már az általános iskolában kívánatos, mert a 10—14 éves tanulók gyorsabban és eredményesebben sajátítják el az ismereteket, mint később. A zsebszámológép használatának megismerése jól előkészíti a tanulóknál a középiskolai számítógép kezelését, a matematikatanároknak pedig fejleszti tanítási gyakorlatukban a számítástechnikai szemléletüket. Az általános iskolai matematikatanárok körében megnőtt az érdeklődés a számológépek iránt, de többen vannak, akik nem értenek a gép használatához. A PTK 1050 sz. kalkulátor megismertetéséért országos tanfolyamon és programfüzetekkel sokat tett eddig az OPI 1983. májusában.

Korábban a Tanértnél kínálat jelentkezett a számológépből, jelenleg hiánycikk. Ára kb. 4400 Ft, ami nemzetközi viszonylatban is drága.

Sok könyv foglalkozik a számológépek, a számítógépek használatával, előnyeivel, hibáival. Néhány könyvet megemlítek:

- Gergely—Hódi—Kelemen—Lukács—Sain—Sólyom: A láncértéktől a számítógépig. Élő matematika 3. (Tan-
könyvkiadó, 1973);
- Billigné—Csébfalvi: Mire képes a

számítógép (Közgazdasági és Jogi Kiadó, 1975);

- Adorján Bence: Számítástechnika tegnap, ma, holnap (Műszaki Kiadó, 1977);

- Csákány Antal: Mit tud a zsebszámológép? (Műszaki Kiadó, 1981).

A „Mit tud a zsebszámológép” című könyvből: „Ez a könyv azokról az eszközökről szól, amelyek egyre több embernek kerülnek a zsebébe, munkaszatálára: a zsebszámológépekről.” „A könyv anyagának megértése nem igényel különösebb előismereteket sem az elektronika, sem a számítástechnika területéről. A középiskolai szinten megszerezhető matematikai ismeretekre azonban sok vonatkozásban feltétlenül szükség van.”

A könyv közérthető nyelven nyújt elemi ismereteket az alkalmazási területekről, a gép felépítéséről, a gép használatáról, használatának korlátairól. Aki semmit sem tud a számológépekről igen jó alapismereteket szerezhet, és aki már sejt valamit a gépek működéséről, annak szélesíti, általánosítja ismereteit. A több száz fajta zsebszámológép azonos, lényeges jegyeit igyekszik a szerző megragadni, az alapvető jelöléseket teszi érthetővé. Elemzi a gépek használhatóságát a nem programozható, „csak” a négy alapműveletet végző géptől a programozhatóig. Például: bonyolult függvényekhez, másodfokú egyenletek gyökeinek kiszámításához ad programot. A könyv játékokat, feladatokat is közöl, és a függelékében, az oly sok gondot jelentő idegen szavakat és azok (billentyűkhöz

írt) jelentését is tartalmazza. A könyv igen sokoldalú, változatos, tartalmas, érdekes, s e cikk kereteit meghaladná teljes értékének ismertetése.

A bevezetőben említettem, hogy a 10—14 éves gyerekek könnyen, a felnőtteknél könnyebben tanulnak meg programozni.

Például: a henger térfogatának kiszámítása programmal: A képlet: $V=r^2 \cdot \pi \cdot m$.

LRN — tanuló állás,
RCL 1 — 1. memória előhívása: r ,
 X^2 — és négyzetre emelése,
 $\times$ — szorzás,
2nd π — tárolt π értékkel (2nd jelenti a billentyű második rendeltetését)
 $\times$ — szorozva,
RCL 2 — 2. memória előhívása: m
= — egyenlő
R/S — stop!
RST — program elejére állítás,
LRN — tanuló állás, illetve számolási állás,
RST — elejétől!

r (a sugár értéke) STO 1 — 1. memóriába,

m (a magasság értéke) STO 2 — 2. memóriába,

R/S — Hajtsd végre a program szerinti számítást és jelezd ki!

A bevezetőben említett kreatívabban tanuló korosztályban levő 7. osztályos és II. osztályos gimnazista fiam által önállóan összeállított programok közül néhány érdekesebb példa:

Közismert a *Fibonacci-sorozat*: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... A PTK 1050-s zsebszámológéppel tagjai akár a 10^{99} -ig (kerekítve) nagyságrendig fáradság nélkül előállíthatók a billentyűk alább felsorolt sorrendben való lenyomogatása után:

LRN	STO 1	0
		STO 1
RCL 1	+	1
		STO 2
+	RCL 2	R/S
RCL 2	=	
2nd Pause	STO 2	
=	RST	
2nd Pause	LRN	
	RST	

Prímszámok:

LRN	2nd $x=t$
2	GTO 2
2nd Pause	1
2nd Pause	INV SUM 0
CLR	2nd Dsz
3	GTO 1
2nd Pause	RCL 1

Átírás 10-s számrendszerből tetszőleges számrendszerbe:

LRN	STO 1
RCL 1	1
:	SUM 5
RCL 2	RST
	2nd Lbl 1
=	RCL 6
2nd Int	R/S

CLR	2nd Pause	STO 3	0 STO 5
4	2nd Pause	×	STO 6
STO 1	GTO 2	RCL 2	STO 7
2nd Lbl 2	2nd Lbl 1	+/-	RST
1	1	+	LRN
SUM 1	SUM 0	RCL 1	RST
RCL 1	GTO 0	=	
$\sqrt{x}$	LRN	STO 4	—Szám a tízesben:
—	RST	RCL 4	STO 1
2nd Int	R/S	×	—Számrendszer
STO 0		1	alapszáma: STO 2
=		0	
2nd $x=t$		y^x	
GTO 2		RCL 5	
2nd Lbl 0		=	
RCL 1		SUM 6	
+		RCL 3	
RCL 0		2nd $x=t$	
=		GTO 1	
2nd INV Int		RCL 3	

A "Tudományos technikai uttörőszemle" egyéni pályázatra kiírt egyik feladatát is kényelmesebb volt számológéppel megoldani:

„Keressünk olyan négyjegyű négyzetszámot, amelyhez 1111-t adunk, ismét négyzetszámot kapunk!”

LRN	
1	
SUM 0	— a 0 tárolóban levőhöz adjon 1-et!
RCL 0	— hívja elő a 0 tárolóban levő számot!
x^2	— emelje négyzetre!
+	— adjon hozzá!
1111	— egymás után négyszer benyomjuk az 1-et,
=	— egyenlő,
$\sqrt{x}$	— vonjon négyzetgyököt!
INV 2nd Int	— a négyzetgyök törtrésze,
2nd C.t	— törölje a 7-es tárolót!
$x \rightarrow t$	— cserélje fel a 7-es tárolót a kijelzővel!
INV 2nd $x=t$	— a 7-es tárolót és a kijelzőt összehasonlítja,
RST	— ha a tört rész nem 0, a program elejére viszi a számítást,
RCL 0	— ha a tört rész 0, írja ki!
R/S	— stop!
RST	
LRN	
RST	

A természetes számok halmazán értelmezve a megoldást a keresett szám 31 négyzeténél nagyobb. Tehát: STO 0

R/S

A megoldás: 2025, amely 45-nek a négyzete.

A programokat célszerű kipróbálni, lépéseken gondolkodni, amihez az említett könyv ad segítséget.

A prím számhoz közölt program 30 perc múlva jelezte a 223 prím számot.

Befejezésül: a zsebszámológéppel való ismerkedés időigényes munka. Sok türelmet igényel, ami később bőségesen megtérül, amikor már könnyedén tudjuk kezelni. Nagyon fontos viszont, hogy a gyerekeknek akkor mutassuk be a programozást, amikor mi magunk már könnyedén kezeljük.

DR. KONCZ JÓZSEF

főiskolai adjunktus

Eger, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola

Számítástechnika a szakosított matematika-tanterv alapján tanuló általános iskolai 5. osztályokban

(Egy kísérlet tapasztalatai)

Köztudott, hogy Magyarországon 1983 júniusától minden középiskolában van számítógép. Az 1983/84-es tanévben megindult a középiskolákban a pezsgés. Szakköri foglalkozásokon az érdeklődő tanulók megismerkedhetnek a számítástechnika alapjaival, elsajátíthatják valamelyik személyi számítógép használatát.

A tervek szerint 1984-től néhány általános iskola is kap számítógépet. Így a számítástechnika elemeinek oktatása ezekben az iskolákban is elkezdődhet.

Jó lehetőséget kínált megyénk négy iskolájában a matematika-szakosított osztályok kísérleti tanterve, amelybe beépítettük a számítástechnikai ismeretek feldolgozását is. Az egri IV. számú általános iskola felső tagozatában angol-, illetve matematika-tagozatos osztályokban is folyik a tanítás. A tanulók (de főleg a szülők) érdeklődése az angol-tagozatos osztályok iránt a legerősebb. Ezért a matematika-tagozatos osztályokba gyengébb gyerekanyag kerül.

A matematika-tagozatos osztályokban a matematika óraszámja némileg magasabb, mint a többi osztályokban, így több idő van az anyag gyakorlására. Tovább javítja a helyzetet az a tény, hogy ezekben az osztályokban kislétszámú csoportokban folyik a munka (15—20 fő).

A felső tagozat minden tanévében 10—10 órában számítástechnikát is tanítunk ezekben az osztályokban kísérletként.

Az alábbiakban tömören szeretnénk összegezni azokat a tapasztalatokat, melyeket az ötödik osztályban szereztünk. Közzé tesszük a tapasztalatokat, hogy a tanító kartársak egyetértésüket vagy egyet nem értésüket fejezhessék ki a témával kapcsolatosan annak érdekében, hogy korunk követelménye — a számítógépek bevonulása az oktatásba — még gyorsabban, még eredményesebben realizálódhasson.

Mivel az iskola az 1983/84-es tanév végéig személyi számítógéppel nem rendelkezett, ezért az ötödik osztályban a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola ABC-80 személyi számítógépével dolgoztunk. Az órák megtartását a főiskola számítástechnikai csoportja vállalta. A csoport tanárai több éven keresztül foglalkoztak már általános iskolás tanulókkal számítástechnikai szakkörökön, mégis ez a feladat izgalmasnak tűnt, mivel a mostani 5. osztályos gyerekanyag reprezentatív-nak nevezhető. Az osztály tanulmányi átlaga: 3,7. A matematika átlaga: 3,75. Szerény képességű, vitagoc gyerekek alkotják az osztályt.

A 10 óra témakörei a következők voltak:

- Az információ fogalma, információ-hordozók.

- A számítógép lényege, egységei.

- Ismerkedés az ABC—80 személyi számítógéppel.

- A PRINT, LET, INPUT utasítások.

- Műveletek sorrendje aritmetikai kife-

jezések számértékének kiszámításánál.

- A program fogalma. Kész programok futtatása.
- Egyszerű programok a PRINT, LET, INPUT utasításokkal.

Követelményként a következőket fogalmaztuk meg.

- Formálódjon az ember és a számítógép közti helyes viszony.
- Ismerje fel a tanuló a személyi számítógépek egységeit és tudja azok funkcióit.
- Ismerje a tanuló a PRINT, LET, INPUT utasítások jelentését.
- Tudjon a tanuló programot készíteni lineáris algoritmusú aritmetikai kifejezések számértékének kiszámítására.
- Tudjon a tanuló egyszerű programokat beillentyűzni, futtatni, és a kapott eredményt kiértékelni.

A négy osztály témaköreinek összeállításánál legfontosabb elvként a fokozatosság betartását, az életkori sajátosságok figyelembevételét, a koncentrikus felépítést és az eddig tanult matematikai és egyéb tárgyi ismeretekre való támaszkodást tartottuk.

A számítástechnika területén is az első lépések a legnehezebbek. Az 5. osztályos gyermek ismeretei nem teszik lehetővé a deduktív módszerek alkalmazását. A bevezető fogalmak elég elvontak, de nélkülük nem szabad azonnal az utasításokhoz kezdeni. „Az információ, az információhordozók, a számítógép lényege” témaköröknél ezért sok-sok konkrét köznap példát hoztunk. A gyűjtött példáknl végigkövettük az információ útját, megnyilvánulási formáit és a hordozókat. A gyerekek odahaza is gyűjtöttek környezetükből, sajtóból, könyvekből számítógépes alkalmazásokat.

A konkrét példák sokaságából a fogalmak definiálása nélkül is a helyes kép alakult ki az absztrakt fogalmakról. Meglepő, hogy a gyerekek milyen sokrétű ismeretanyaggal rendelkeznek a számítógépről. Nagyon pozitív tény, hogy

nemcsak azt tudják, hogy a számítógép „jól tud számolni”, hanem sokrétű számítógépes alkalmazásokról van tudomásuk. A gyerekeket a téma nagyon izgatja. Rendkívül fogékonyak a számítógépek világa iránt.

A számítógépek lényegének megértésénél a működési elv elemzése ezen a szinten nem lehet feladatunk. A témakörök koncentrikus felépítése miatt erre a témakörre később is visszatérünk és egyre bővebb megvilágításra módunk lesz. Fontos követelmény viszont, hogy az ember és a számítógép közti viszony jó irányba formálódjon. Az első perctől kezdve tudatosodjon a gyerekekben, hogy a számítógép az ember segítőtársa és nem ellensége. A számítógép megítélésének *első fázisa*, hogy dicsőítik a számítógépet. Ezt a szemléletet a zsebszámológépek használata még erősíti is. Az általános iskolás tanuló számára a numerikus számolás megterhelő, nagy munka. Súlya vetekszik a probléma megoldásának algoritmusával. A zseb-számológép a probléma teljes megoldását jelenti számukra. A *második fázis* akkor alakul ki, amikor közvetlen munkakapcsolatba kerülünk a számítógéppel, például elkezdjük a számítógépen a programozást. Az első néhány óra után rádöbbennek a tanulók, hogy a számítógép még nagyszerű képességeinek birtokában sem oldja meg „önállóan”, „magától” a problémát. A problémamegoldás elemi utasításait nekünk kell megtervezni és a gép számára érthető módon tudomására hozni. Különösen a programnyelv-tanulás kezdetén sok új tanulnivaló, kipróbálásra váró parancs és utasítás van, mely táplálja a kezdben azt a szemléletet, hogy a számítógép semmire sem használható, mert mindent a „szájába kell rágni”. Az utasítások fokozatos bevezetésével és azok gyakori, egyszerű példákra való alkalmazásával hamar túljutunk a második fázison. A *harmadik szakaszban* kialakul a helyes szemlélet. A gép megalkotója, tevékenységének tervezője, szervezője, parancso-

lója az ember. „Magától”, ember nélkül valóban nem tud semmit, de ha szót értünk a számítógéppel, azaz megtanuljuk hogyan lehet számára értelmes parancsokat, utasítás-sorozatokat adni, akkor meggyőzően tapasztalhatjuk, hogy a számítógép pontosságával, megbízhatóságával nagyon jó segítője az embernek. Az embert mentesíti sok előre jól megtervezhető, de fárasztó, monoton, unalmas munkától, és így számunkra még több idő marad a kreatív munkára, az ember igazi képességeinek kibontakoztatására.

A számítógépek egységeinek és azok funkcióinak megértése és rögzítése érdekében hasonlatokat használtunk. Az idegen szavak használatát fokozatosan yezettük be. Tapasztalataink szerint ezek nem okoztak problémát, jelentésüket megismerték a tanulók.

A személyi számítógép bekapcsolása előtt felhívtuk a gyerekek figyelmét a bekapcsolási sorrendre. Ez is egy algoritmus.

A számítástechnikai órák anyagát külön füzetbe írták a gyerekek és jövőre is ugyanebbe a füzetbe fogunk dolgozni. Újságokból, folyóiratokból, prospektusokból képeket és cikkeket gyűjtöttek a számítógépekről és ezeket is a füzetbe ragasztották. Az alkalmazott számítógép billentyűzetéről mindenki kapott egy rajzot. A billentyűzet füzetben való elhelyezésével sok információt rögzítettünk és az otthoni gyakorlást is segítettük.

A számítógépet működés közben először játékprogramokkal mutattuk be. Minden gyerek önállóan is használhatta a programot. Bemutattunk olyan programokat is, melyek egyszerű numerikus problémákkal foglalkoztak, de olyanokat is, melyeknél kidomborodik a számítógép sokoldalú felhasználhatósága.

A PRINT, LET, (INPUT) utasítások

alkalmazása során a billentyűzet használatát is gyakoroltuk. Minden gyermek „felfedezte” és könnyedén elsajátította ezek használatát. Gyakoroltuk gép nélkül is az aritmetikai kifejezések matematikai alakról BASIC nyelvre való átírását és a kifejezések számértékének meghatározását munkatáblázatokkal. Jól bevált módszer, hogy kezdetben csak a „kézi erővel” való kiszámítás után ütöttük be a parancsot. Nagy hangsúlyt fektettünk a precedenciaszabályok gyakorlására. Miután az alapműveletek alkalmazása és bebillentyűzése biztonságossá vált, egyszerű szöveges problémákat foglalmaztunk meg. Az ilyen szöveges feladatok megoldási menetét mindig pontosan rögzítettük a füzetbe is. Ekkor lényegében a problémamegoldás folyamat-ábráját készítettük el a szimbólumok bevezetése nélkül.

A programkészítésknél csak a PRINT, LET, INPUT utasításokat használtuk. Nagy hangsúlyt fektettünk arra, hogy a gyerekekben tisztázódjon a parancs és az utasítás közötti különbség, a program lényege, a programírás és a futtatás folyamata.

A 10 óra tapasztalatait a következőkben összegezhethetnk:

Világosan bebizonyosodott, hogy átlagos képességű gyerekekkel is már 5. osztálytól taníthatók számítógépes ismeretek. Törekedni kell arra, hogy ne akarjunk néhány órában túl sokat markolni. A kezdeti lépések elsajátítása nagyon fontos.

Minden gyermek lelkesedéssel, jó kedvvel vett részt az órai munkában. Néhány óra után már délutánonként önállóan is próbálgatták tudásukat. Az órai anyag füzetben való rögzítése gondos, rendes volt minden gyermeknél. Az ütemezett anyagot maradéktalanul megvalósítottuk.

Bizonyítási stratégiák az iskolai matematikaoktatásban

„A dialektika eleme —
az analízis és szintézis
egyesítése.” (Lenin)

Előző cikkünkben tételek megsejtését szolgáló reduktív eljárásokat ismertettünk. (Tételek megfordítása, analógia, általánosítás, indukció). Ezúttal tételek bizonyításakor alkalmazható stratégiákat mutatunk be. A bizonyítások tanításának egyik alapvető célja, hogy a tanulók képesek legyenek önállóan is egyes tételek bizonyítását elvégezni. Ehhez viszont elengedhetetlenül szükséges, hogy ne csak kész bizonyításokat lássanak, tanuljanak meg, hanem magát a bizonyítási tevékenységet is sajátítsák el. Kártszi professzor szavait idézzük: „Nem kész bizonyításokat kell tanítani, hanem a bizonyítási tevékenységet.”

Háromféle — az iskolai oktatási gyakorlatban is használt — bizonyítási stratégiát ismertetünk:

1. Szintézis.
2. Teljes analízis.
3. Nem teljes analízis.

Fontos megjegyeznünk, hogy az analízis és szintézis fogalmát a matematikai tételek bizonyításával kapcsolatban a következő értelemben használjuk:

Az *analízis* olyan gondolkodási eljárás, melynek segítségével a következményekről az okokra térünk át, megkeressük a következmények okát, eredetét.

A *szintézis* olyan gondolkodási eljárás, amelynek alkalmazásával az okokról a következményekre térünk át.

RENE DESCARTES *Logika* című művében egy szemléletes példával illusztrálja a két módszer (eljárás) lényegét. „Tegyük fel a következő kérdést: Leszármazottja vagyok-e Nagy Károlynak? A válasz megkeresésére két út lehetséges. Az egyik: a családfámon visszafelé haladva Nagy Károly koráig; a másik: Nagy Károly családfáján előrehaladva a mai korig. Ha egy családfán vagyunk, akkor leszármazottja vagyok Nagy Károlynak.”

Az elsőfajta megoldási mód az analízist, a második a szintézist illusztrálja.

1. Tételek bizonyítása szintézis módszerével

E bizonyítási stratégia lényege: $A \Rightarrow B$ tétel feltételeiből és olyan ismert tételekből, definíciókból, axiómákból indulunk ki, amelyekből logikailag megalapozott lépésekkel eljutunk egy következményhez (állításához). Ha az így nyert következmény (K_1) azonos a kiinduló tétel állításával, kész a bizonyítás. Ha nem, akkor K_1 -et tekintve kiindulásnak, az előbbi módon egy K_2 következményhez jutunk. Az eljárást addig folytatjuk, amíg el nem jutunk egy olyan K_n következményhez, amelyre $K_n = B$ teljesül. Az eljárás szerkezete szimbolikus formában a következő:

$$A \Rightarrow K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow K_n = B.$$

Úgy is mondhatjuk, hogy A elégséges feltétele K_1 -nek, K_1 elégséges feltétele K_2 -nek, ..., K_{n-1} elégséges feltétele $K_n = B$ -nek.

E bizonyítási stratégia alkalmazásánál két alapvető kérdés merül föl:

1. Mik a tétel feltételei?
2. Mi következik a feltételekből?

Az első kérdés okozza a főbb gondot, hiszen az ismert (tanult) tételekből, axiómákból, definíciókból nem könnyű kiválasztani azokat, amelyeket kiindulásnak tekintve eljuthatunk az állításig.

Gyakran tűnik mesterkéltnek a tanulók számára a kiindulási feltétel kiválasztása. (Feltételen értjük az ismert tételek, axiómák, definíciók összességét.) Nagy a távolság a kiindulási lépés és a tétel állítása között, a közöttük levő kapcsolat észrevétele nem könnyű. Formál-logikai szempontból a módszer egyszerű, világosan le van szögezve mit és hogyan végzünk el, de pszichológiailag a fentiekben vázoltak miatt problematikus a tanulók számára, hiszen a „Miből induljunk ki?” kérdésre nehéz olyan elfogadható választ adni, amelynek értelmét mindjárt látják a tanulók is. Sajnos az iskolai matematika-tankönyvek túlnyomórészt szintetikus formában közölt bizonyításokat tartalmaznak, s ez a tény az önálló bizonyítási képesség fejlesztését csekély mértékben mozdítja elő.

Példa.

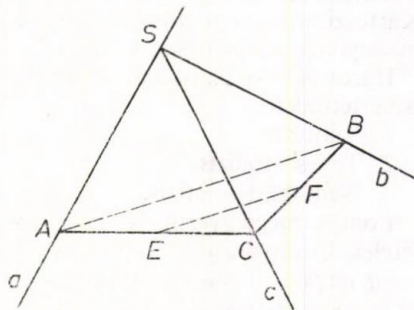
Tekintsük az $Sabc$ triedert! Bizonyítsuk be, hogy a (bc) , (ca) szögek szögfelezői és az (ab) szög mellékszögének szögfelezője egy síkra illeszkednek!

Bizonyítás. Vegyük fel az a, b, c éleken rendre az A, B, C pontokat úgy, hogy $|SA| = |SB| = |SC|$ teljesüljön! (1. ábra.)

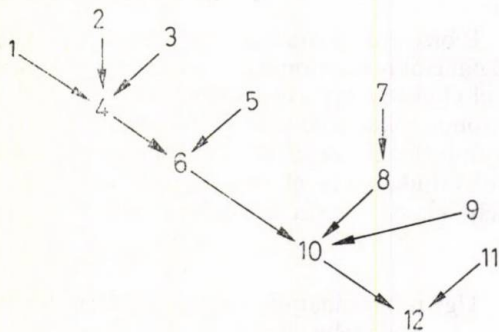
Megjegyzés: A tanulók számára nem meggyőző e lépés. Miért pont ezt tesszük? Mi köze van ennek a lépésnek a szóban forgó fél-egyenesek egy síkra illeszkedéséhez?

A bizonyítás során felhasznált tételeket és azok következményeit pontokba foglaljuk, majd gráf szkémával szemléltetjük a lépéseket.

1. $|AS| = |BS| = |CS|$.
2. $[SE], [SF], [SM]$ a megfelelő szögfelezők.
3. Egyenlő szárú háromszögben a szárszög szögfelezője felezi az alapot.
4. $[EF]$ az ABC háromszög egyik középvonala.
5. A háromszög középvonalainak tulajdonságai.
6. $(EF) \parallel (AB)$.
7. Egyenlő szárú háromszög szárszöge mellékszögének szögfelezője párhuzamos az alappal.
8. $(SM) \parallel (AB)$.
9. Párhuzamosság tranzitív tulajdonsága.
10. $(SM) \parallel (EF)$.
11. Két párhuzamos egyenes egyetlen síkot határoz meg.
12. (SM) és (EF) egyenesek egy síkban vannak.



1. ábra



2. Teljes analízis

A módszer alkalmazásának kiindulási pontja az $A \Rightarrow B$ tétel B állítása. A B állításhoz keresünk egy E_1 elégséges feltételt. Ha találunk egy ilyen feltételt, és ez közvetlenül következik a tétel feltételeiből, ismert tételekből, axiómákból, definíciókból, akkor kész a bizonyítás. Ha nem, akkor az előbb leírt módon keresünk további elégséges feltételeket. Ha találunk egy olyan E_n feltételt, amely elégséges feltétele E_{n-1} -nek, továbbá E_n közvetlenül következik a tétel feltételeiből, ismert tételekből, axiómákból, definíciókból, akkor bebizonyítottuk a tételt. Szimbolikus formában vázolva az eljárás lényege: E_1 elégséges feltétele B -nek, E_2 elégséges feltétele E_1 -nek, ..., E_n elégséges feltétele E_{n-1} -nek és az A elégséges feltétele E_n -nek.

Az eljárás szerkezete:

$$B \Leftarrow E_1 \Leftarrow E_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow E_{n-1} \Leftarrow E_n \Leftarrow A.$$

A módszer alkalmazásánál két fő kérdés merül fel.

a) Mi a tétel állítása?

b) Miből következik az állítás?

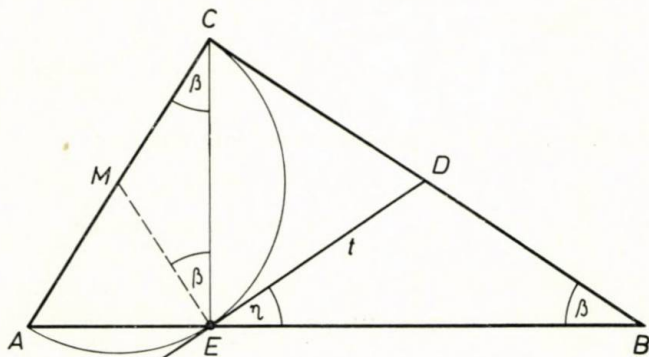
Formál-logikai szempontból az analízis módszere nehezebb a tanulók számára, hiszen fordított irányú okoskodást igényel. Pszichológiai-didaktikai szempontból viszont egyszerűbb, természetesebb. A tanulók világosan látják mivel kell kezdeni a bizonyítást, s az egész bizonyítás során célirányos, tudatos minden lépés. Az eljárás szerkezete egyszerű: „Mit kell bizonyítani? Mit elegendő ehhez bizonyítani?” alapkérdésekre kell megfelelő választ adni. E módszer alkalmazása nagymértékben fejleszti az önálló bizonyítási képességet.

1. példa.

Tekintsük az ABC derékszögű háromszöget, amelyben C legyen a derékszögű csúcs! Az AC oldal felezőpontja legyen M . Az M középpontú A csúcra illeszkedő kör az AB oldalt E pontban metszi. Jelöljük az E pontban húzott körérintőt t -vel! A t érintő a BC oldalt D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BDE háromszög egyenlő szárú! (2. ábra.)

Feltételek:

1. Az ABC háromszög derékszögű.
2. M pont az AC szakasz felezőpontja.
3. E pont az M középpontú, MA sugarú kör pontja és az AB oldalra illeszkedik.
4. A t egyenes a kör E pontbeli érintője, mely a CB oldalt a D pontban metszi.



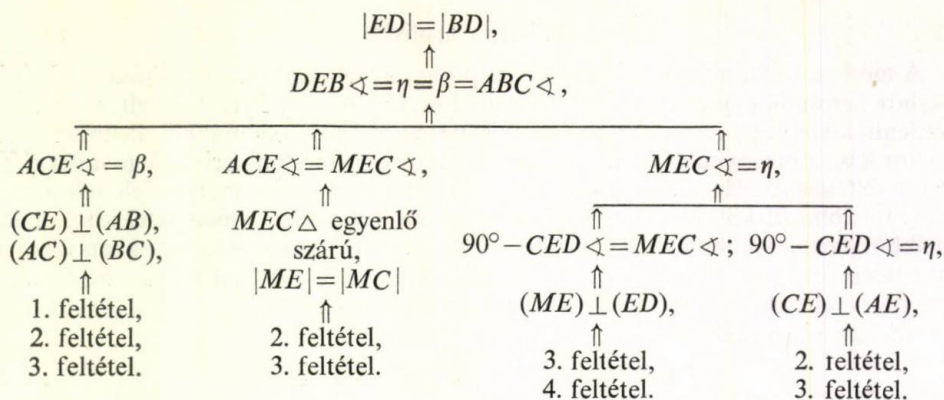
2. ábra

Állítás:

Az EBD háromszög egyenlő szárú, azaz $|ED| = |BD|$.

Bizonyítás.

Induljunk ki a tétel állításából!



2. példa.

Tétel: Az m és n valós számok az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei (a, b, c valós számok, $a \neq 0$), ha $m + n = -\frac{b}{a}$ és $mn = \frac{c}{a}$ teljesül.

Bizonyítás.

Induljunk ki a tétel állításából, azaz legyen $m = x_1$ és $n = x_2$, ahol x_1 és x_2 egy másodfokú egyenlet gyökei!

$\uparrow$

Annak elégséges feltétele, hogy az m és n számok egy másodfokú egyenlet gyökei legyenek

$$\begin{array}{c}
 (x - m)(x - n) = 0 \\
 \uparrow \\
 x^2 - (m + n)x + mn = 0 \\
 \uparrow
 \end{array}$$

Annak elégséges feltétele, hogy az m és n számok az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei legyenek

$$-\frac{b}{a} = m + n \quad \text{és} \quad \frac{c}{a} = mn.$$

Utóbbi két feltétel pontosan tételünk feltétele.

3. Nem teljes analízis

Kiindulópont ezen módszer alkalmazásánál is az $A \Rightarrow B$ tétel B állítása. Ezt igaznak feltételezve $N_1, N_2, \dots, N_n$ szükséges feltételekre következtetünk mindaddig, amíg elérjük, hogy N_n -re teljesül: N_n -ből következik a tétel feltétele vagy ismert tétel, axióma, definíció. Fontos tudatosítani a tanulóknak, hogy így csak szükséges feltételek láncolatához jutunk. Külön meg kell győződni a feltételek elégséges voltáról is. Mindenesetre e módszer segítségével eljuthatunk egy bizonyítási ötlethez. Ezek után már nem tűnik mesterkéltnek a tanulók számára az ily módon kiválasztott kiindulási feltétel. (Lásd szintézis módszerét!)

Az eljárás szerkezete:

$$B \Rightarrow N_1 \Rightarrow N_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow N_n \Rightarrow A.$$

Fontos a fordított irányú következtetés helyességének vizsgálata is.

$$A \Rightarrow N_n \Rightarrow N_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow N_2 \Rightarrow N_1 \Rightarrow B.$$

Leggyakrabban algebrai és trigonometriai azonosságok igazolásakor alkalmazzuk a fenti eljárást.

1. példa.

Két nem negatív szám számtani és mértani közepére vonatkozó összefüggés igazolása.

Nem teljes analízis

Legyen $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

Állítás:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}, \\ \Downarrow \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab}, \\ \Downarrow \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0, \\ \Downarrow \\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Igaz állítás.

Szintetikus bizonyítási mód

Tekintsük a következő igaz egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0, \\ \Downarrow \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0, \\ \Downarrow \\ a+b &= 2\sqrt{ab}, \\ \Downarrow \\ \frac{a+b}{2} &= \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Ez pontosan tételünk állítása.

A fentiek alapján a bizonyítás történhet tehát úgy, hogy először nem teljes analízis módszerével eljutunk $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ igaz állításhoz, s ebből szintézis módszerével következtetünk a tétel állítására.

Az oktatási gyakorlatban a két módszert együttesen alkalmazzuk, amikor az állításból kiindulva *szükséges és elégséges* feltételeket keresünk, így mindkét irányt egyszerre realizáljuk. Az előbbi tétel bizonyításának rövid sémája:

Feltétel: $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

→ ANALÍZIS

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

← SZINTÉZIS

Gyakori tanulói hiba, hogy a nem teljes analízis módszerét bizonyító erejűnek tekintik olyan esetekben is, amikor visszafelé nem vezet igaz állításhoz (kijelentéshez) a következtetés. Típushibák: két szám négyzetének egyenlőségéből a két szám egyenlőségére való következtetés. Két szög sinusának egyenlőségéből a két szög egyenlőségére való következtetés.

2. példa.

Tekintsük a Cauchy—Schwarz—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség legegyszerűbb alakját:

Minden a_1, a_2 és b_1, b_2 valós számra teljesül.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Szintetikus bizonyítás

Legyen a_1 és a_2 nullától különböző, egyébként triviálisan teljesül az egyenlőtlenség. Tekintsük a $P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2$ másodfokú polinomot, amely minden x -re nem negatív értéket vesz föl, 0-t csak akkor, ha egyszerre teljesül $a_1x - b_1 = 0$ és $a_2x - b_2 = 0$ azaz $x = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

A $P(x)$ polinomnak tehát legfeljebb egy zérushelye van. Alakítsuk át $P(x)$ -t:

$$P(x) = x^2(a_1^2 + a_2^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2).$$

Legfeljebb egy zérushely feltétele:

$$\frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} - \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \equiv 0.$$

Mivel $a_1^2 + a_2^2 > 0$, ezért

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \equiv (a_1b_1 + a_2b_2)^2,$$

azaz teljesül tételünk állítása.

Fő nehézség: a bizonyítás elején mesterkéltnek tűnik a $P(x)$ polinom bevezetése.

Nem teljes analízis alkalmazása

Induljunk ki az állításból! Szorzás és összevonás után kapjuk

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \equiv 0,$$

↓

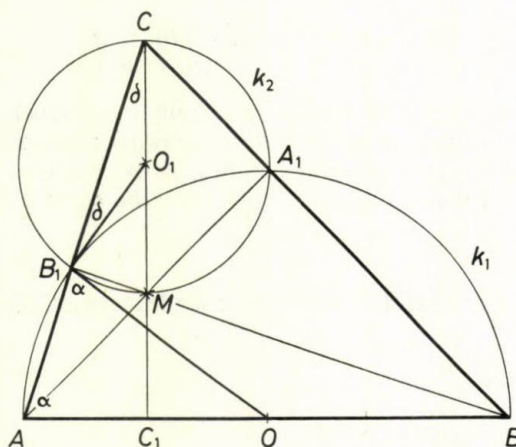
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \equiv 0.$$

Ez nyilvánvalóan igaz állítás, mely minden a_i, b_i ($i=1; 2$) számra teljesül.

Ezen igaz állításból az előbbi következtetési lánc fordított irányú alkalmazásával könnyen eljuthatunk a tétel állításáig, s ezek után a szintetikus bizonyítás kiindulási lépése nem tűnik mesterkéltnek.

Megjegyzés: Az állítás tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re analóg módon igazolható.

Néhány megjegyzés bizonyítási feladatok tanításával kapcsolatban



Egy konkrét bizonyítási feladat megoldásán keresztül mutatjuk be a kívánatos lépéseket.

Feladat: Tekintsük az ABC háromszöget! Legyen az A pontból kiinduló magasságvonal talppontja A_1 , a B pontból kiinduló magasságvonal talppontja B_1 . Állítás: az AB szakasz Thalesz-köre és a B_1, A_1, C pontokra illeszkedő kör merőlegesek egymásra.

I. Feladat megértése, ábra készítése, jelölések. (3. ábra.)

II. Bizonyítási stratégia megválasztása

Szintézis és teljes analízis kombinált alkalmazása.

↑
SZINTÉZIS
↓

1. feltétel

$$(AA_1) \perp (BC), \\ (BB_1) \perp (AC),$$

↓
 A_1, B_1 pontok illeszkednek az AB szakasz Thalesz-körére.

2. feltétel

A_1, B_1 és C pontok egy körre illeszkednek.

↓
↓
↓
↓

Az $ABC \triangle M$ magasságpontja illeszkedik az A_1B_1C pontokon átmenő körre, hiszen az A_1B_1CM négyszög húrnégyszög.

↓

MC szakasz az A_1B_1C pontokra illeszkedő kör átmérője.

↑
TELJES ANALÍZIS
↓

$B_1AO \sphericalangle + B_1CO_1 \sphericalangle = 90^\circ$ állítás elégséges feltétele, hogy a szóban forgó szögek egy derékszögű háromszög hegyesszögei legyenek. Ez teljesül.

↓

$AB_1O \sphericalangle + CB_1O_1 \sphericalangle = 90^\circ$ elégséges feltétele, hogy

$$AB_1O \sphericalangle = B_1AO \sphericalangle = \alpha,$$

$$O_1B_1C \sphericalangle = B_1CO_1 \sphericalangle = \delta, \text{ ahol } B_1AO \sphericalangle + B_1CO_1 \sphericalangle = 90^\circ.$$

↓

$O_1B_1O \sphericalangle$ derékszög voltához elegendő megmutatni, hogy

$$AB_1O \sphericalangle + CB_1O_1 \sphericalangle = \alpha + \delta = 90^\circ.$$

↓

$(O_1B_1) \perp (B_1O)$ állítás igazolásához elegendő megmutatni, hogy $O_1B_1O \sphericalangle$ derékszög.

↓

A két kör merőlegességének bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $(O_1B_1) \perp (OB_1)$

↓

$$k_{AB \text{ Thalesz-kör}} \perp k_{A_1CB_1}.$$

III. Bizonyítás rögzítése

Megállapítás.

Indoklás.

$$(1) A_1 \in k_{\text{Thalesz } AB} = k_1, \\ B_1 \in k_1$$

1. feltétel,

$$(2) M \in k_{A_1B_1C} = k_2,$$

1., 2. feltétel
Húrnégyszög-tétel megfordítása.

$$(3) B_1AO \sphericalangle + B_1CO_1 \sphericalangle = 90^\circ,$$

Az ACC' derékszögű háromszög hegyesszögei.

$$(4) B_1AO \sphericalangle = AB_1O \sphericalangle = \alpha,$$

$$B_1CO_1 \sphericalangle = CB_1O_1 \sphericalangle = \delta,$$

$$(5) O_1B_1O \sphericalangle = 90^\circ,$$

$$(6) k_1 \perp k_2,$$

AOB_1 egyenlő szárú $\triangle$ alapon fekvő szögei.

CO_1B_1 egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei.

(3), (4) és $CB_1A \sphericalangle$ egyenesszög volta miatt.

Két kör merőlegességének definíciója miatt.

IV. Elemzés

A következő kérdések vizsgálhatók:

- A bizonyítás helyességének vizsgálata.
- Az alkalmazott eljárások kiemelése.
- A bizonyított tétel beillesztése a már ismert tételek rendszerébe.
- A bizonyított tétel alkalmazási lehetőségei.

Megjegyzés: Tompaszögű háromszög esetén analóg módon igazolható a feladat állítása.

Derékszögű háromszög esetén érdektelen eset áll elő, hiszen C , B_1 , A_1 és M pontok egybeesnek.

Befejező megjegyzések

1. A tanulók bizonyítási képességének fejlesztése az életkor függvénye, fokozatos-
ságot, céltudatosságot, nagy türelmet igénylő munka.

2. Jelentős segítséget nyújthat a tanulók számára az önálló bizonyítási képesség
fejlődéséhez, ha nem csak izolált tételekkel ismerkednek meg, hanem a tételeket fel-
tételeik, illetve állításaik szerint rendszerbe foglalják.

3. Példáink az iskolai oktatásban is realizálható bizonyításokat illusztrálnak.
Célunk az egyes bizonyítási stratégiák lényegének bemutatása volt. Nem tértünk ki
arra a kérdésre, hogy egy-egy tétel logikai forrása többféle is lehet. Más-más logikai
előzménynek lehet ugyanaz a következménye. Például a SYLVESTER tételt GALLAI
a párhuzamossági axióma következményeként bizonyította. (A tétel igaz az euklideszi
síkon.) KELLY az egybevágósági axiómákból vezette le. (Tehát igaz az abszolút
síkon is.) COXETER rendezési (PASCH-féle) tételből vezette le. (Tehát igaz a ren-
dezett síkon is.)

4. Célszerű összegyűjteni a tanulók számára geometriai bizonyítási feladatok meg-
oldására vonatkozó cselekvési eljárások egyes lépéseit. Ezt nem kell a tanulóknak
mechanikusan bevérsniük. Ki kell függeszteni az osztályterem falára, s a többszöri
alkalmazás után várható, hogy egyre több tanuló megjegyzi a főbb lépéseket, és azo-
kat a feladatok önálló megoldása során fel is használja.

Végezetül néhány fontosabb szabályt, utasítást ismertetünk a fenti listából.

1. Készíts ábrát! (Ne speciális esetet vázolj!)

Mi a tétel feltétele? Mi a tétel állítása?

Írd fel a feltételt és az állítást az ábrának megfelelő szimbolumokkal!

2.1. Indulj ki a feltételekből! Milyen megállapítások következnek közvetlenül a
feltételekből? Milyen tételek, illetve definíciók tartalmazzák a feltételeket? Ezek a
bizonyítás eszközei lehetnek!

Égészítsd ki az ábrát! Mely levezethető megállapítások vezetnek legegyszerűbben a célhoz?

2.2. Tekintsük az állítást! Miből következik az állítás? Milyen tételek és definíciók tartalmazzák az állítást vagy egy hasonló állítást? Ezek a bizonyítás eszközei lehetnek! Ha találtál egy ilyen eszközt, egészítsd ki az ábrát megfelelő segédvonalakkal. Mely elégséges feltétel vezet legegyszerűbben a célhoz?

Gyakran célszerű az állítást vele ekvivalens formába átfogalmazni.

3. Változtasd a kétféle eljárást addig, amíg nem találtál egy utat a feltételektől az állításig!

Ha többféle eszköz kínálkozik, becsüld meg a legsikeresebbnek tűnőt! Ha nem tudsz továbbmenni, ellenőrizd, hogy minden feltételt felhasználtál-e!

Vigyázz! Lehetséges, hogy egy speciális ábra alapján vontál le helytelen következtetéseket. Térj át az általános helyzetű ábrára!

4.1. Tekintsd át a speciális eseteket!

Tekintsd a határeseteket, általánosításokat, lehetséges analógiákat! Ez elvezethet a bizonyítás ötletéhez!

4.2. Keress olyan segédtételeket, amelyek elvezethetnek a tétel bizonyításához!

5. Fordítsd le a feladatot vektoralgebra vagy koordináta geometria nyelvére! Esetenként a *trigonometria* is segíthet!

IRODALOM

- [1] DUSEK, F.: *Zur Methodik des Beweizens*. Mathematik in der Schule, 1968/8.
- [2] *Zum logischen Denken im Mathematikunterricht*. Volk und Wissen, Berlin 1975.
- [3] R. THIELE: *Mathematische Beweise*. BSB B. G. Teubner Leipzig, 1979.
- [4] PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája*. Gondolat, Budapest, 1977.
- [5] KÁRTESZI FERENC: *A geometriatanítás korszerűsítéséről*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [6] *Kárteszi Ferenc szemináriumai, előadásai*.
- [7] Horváth Jenő előadásai, szemináriumai.
- [8] Z. KRYGOWSKA: *A geometria tanításának néhány kérdése*. Matematikai Lapok, XVI/3—4.
- [9] *Metodika predavanyija matematiki*. Moszkva, Prosvescsenyije, 1975.
- [10] M. ERDNYIJEW: *Übungsformen im Mathematikunterricht*. Volk und Wissen, 1977.
- [11] N. V. METELSZKIJ: *Didaktika matematiki*. Minszk, 1982.
- [12] W. WALSCH: *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Volk und Wissen, 1975.
- [13] G. HAVAS KATALIN: *Formális logika*. Kossuth Könyvkiadó, Budapest, 1973.

DR. RÉDLING ELEMÉR
KKVMF SZI
Székesfehérvár

Megjegyzések egy cikkhez

A Matematika Tanítása 1983. évi 6. számában jelent meg Schuster Gyula cikke „Helyzetkép a gondolkodásra nevelés didaktikájáról” címmel. A cikk érinti a „Hasonlóság” témakör gimnáziumi tanítását is (lásd a 172. oldalon). Most a cikknek ehhez a részéhez fűzök néhány megjegyzést. A szerző ugyanis a hasonlósággal kapcsolatosan megkérdő-

jelezi egyrészt a tanterv, másrészt pedig *Hasonlósági transzformációk* című könyvem koncepciójának helyességét.

1. Ismeretes, hogy a gimnáziumok matematika-tanterve a „Hasonlóság és alkalmazásai” fejezet indítására két változatot is javasol: a *párhuzamos szelők tételével*, illetve a *nagyítással* (közép-

pontos hasonlósággal) való kezdést. E kétféle indításból kétféle felépítést kaphatunk. (Itt jegyzem meg, hogy *nagyításnak* nevezem a középpontos hasonlóságnak azt a speciális esetét, ahol az *O* centrum a tárgypontokat nem választja el a képkültől. A nagyítás fogalmába a kicsinyítést is beleérttem.)

Schuster Gyula cikkéből kitűnik, hogy csak a párhuzamos szelők tételével való kezdést tartja eléggé precíznek, s a nagyítással való indítást csupán a tanterv által „megengedett” változatként említi.

Érdemes ezt a kérdéskört részletesebben is megvizsgálni.

Ha a *nagyítással* indítunk, akkor a nagyítás alapvető tulajdonságait — megfelelő előkészítés után — a *szemléletből* fogadjuk el. Ezeket tehát most *axiómáknak* tekintjük. Ha ezeket elfogadjuk, akkor a hasonlóság további kérdésköreit már *deduktív* úton tárgyalhatjuk, így pl. igazolhatjuk a párhuzamos szelőkre vonatkozó tételeket is.

A *másik felépítésben* elsőnek a *párhuzamos szelők tételét* kellene igazolni (lásd pl. az [1]-ben a 110—112. oldalon). E tételből kiindulva a nagyítás tulajdonságait már rendre igazolni lehet.

A középiskolában azonban a párhuzamos szelők tételének elsőként való igazolása nehézségeket okozna, ezért általában megelégszenek azzal, hogy a tétel helyességét csupán *racióális arányokra* mutatják meg. (Ez felel meg a tantervi előírásoknak is. A tárgyalást lásd pl. a [2] alatt említett tankönyvben.) A nagyítás tulajdonságainak tárgyalása is többnyire *felemás*: egyes tulajdonságokat igazolnak, másokat viszont csak egy-két konkrét példán világítanak meg. (Nem gondolunk itt a speciális tantervív osztályokra.)

A matematikai szigorúságot tekintve tehát *nincs lényeges különbség* a kétféle indítás között. Ezért a tanterv a két változatot *egyenértékűnek* tartja és a választást a *tanárra* bízta.

Nem matematikai, hanem elsősorban didaktikai szempontok határozzák tehát

meg, hogy melyik változatot választjuk.

2. *Hasonlósági transzformációk* című könyvemben a hasonlóság tananyagának *egy lehetséges* feldolgozása található meg. A témakört a *nagyítással* indítottam. Ezt a választást a könyvben részletesen megindokoltam (lásd az 52—55. oldalon), ezért erre itt nem térek ki.

Mint már utaltam rá, Schuster Gyula nem ért egyet ezzel az indítással. Ezzel kapcsolatosan elsősorban azt az eljárás-módot kifogásolom, amelyet cikkében alkalmaz. Ugyanis önkényesen kiválaszt a könyvből egy mondatot, majd ezt meg is csonkítja, s úgy „idézi”. Így a mondat értelme módosult. Schuster Gyula azután ezzel a mondattal igyekszik alátámasztani véleményét... Ez a mondat — szöveggörnyezetéből kiragadva — viszont már nem tükrözi hűen könyvem koncepcióját.

„A tanulók nem is tartják szükségesnek, hogy ... igazoljuk” — idéz a szerző a cikkben. Nem utal tehát arra, hogy mire is vonatkozik ez az állítás. (Talán nem tartom fontosnak könyvemben az igazolásokat? Joggal teszi fel a cikk olvasója ezt a kérdést, ha nem ismeri a könyvet.)

Az eredeti szöveg a következő (lásd a könyv 54. oldalán): „A tanulók nem is tartják szükségesnek, hogy a nagyítás tulajdonságai közül a szemlélet alapján nyilvánvalókat is igazoljuk (így pl. azt, hogy az egyenes képe egyenes).”

3. Megemlítem a cikkből egy pontatlanságot. A 172. oldal első felében alján a nagyítás tulajdonságaira utalva ez olvasható: „...egyenes képe párhuzamos egyenes...” De *egyetlen* egyenes (itt a képeggyenes) párhuzamosságáról nem szokás beszélni.

A helyes szöveg pl. a következő lehetne: az egyenes párhuzamos a képével.

4. Schuster Gyula ezt írja a cikkben (lásd a 172. oldalon): „Nevelési szempontból nem mindegy, hogy mit fogadtat el a tanár axiómaként. A tanulók nagy

része elfogadná bizonyítás nélkül, néhány konkrét számmal való behelyettesítés tapasztalatai alapján azt is, hogy az $n^2 - n + 41$ kifejezés minden pozitív egész n -re prímszámot ad."

Úgy vélem, hogy nem szerencsés összevetni egymással az iskolai geometriaanyagban található axiómákat ezzel a példával. Ezek az axiómák ugyanis a tanulók számára a *szemlélet alapján nyilvánvalók*. A példában megfogalmazott állítás azonban egyáltalán *nem nyilvánvaló*.

Erre a példára is gondolva úgy vélem, hogy ha a tanulók még nem látják a matematikai bizonyítások (és cáfolások) szerepét, akkor inkább ezt a hiányosságot érdemes felszámolni, mint a geometriai transzformációk (így a nagyítás) szemlélet alapján nyilvánvaló tulajdonságait igazolni.

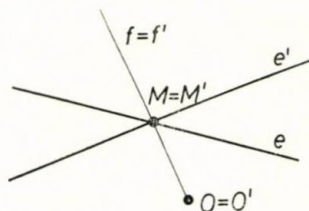
5. Az iskolai geometriaanyag feldolgozása nagyon bő axiómarendszerre épül. A tárgyalásmód deduktív, de nem axiomatikus. Erősebb osztályokban igényesebb lehet a felépítés, mint gyengébb osztályban.

Ha jut rá idő, és sikerül a bizonyításra az igényt felkelteni, akkor pl. a nagyítás kapcsán a következő is igazolható:

Az O centrumú, $k \neq 1$ arányú nagyítás esetén a középpontra nem illeszkedő egyenes párhuzamos a képével.

A bizonyítás a következő lehet:

Legyen az e egyenes képe az e' egyenes. (Lásd a mellékelt ábrát!) A nagyítás értelmezéséből adódik, hogy az e és e' nem lehetnek kitérők, tehát az e és e' közös síkon helyezkedik el. Ha az e és e' metszené egymást egy M pontban, akkor az M fixpontja lenne a nagyításnak: $M = M'$. Mivel azonban $O = O'$, ezért itt $k = 1$ adódik, ellentétben a $k \neq 1$ feltétellel. Az e és e' tehát párhuzamos egyenesek.



Ez a bizonyítás nem igényli a párhuzamos szelőkre vonatkozó, s a nem racionális arányokat is megengedő tételeket. (Feltételeztük viszont, hogy a nagyítás egyeneshez egyenest rendel.)

A nagyítás más tulajdonságainak igazolása pl. a [4] alatt említett cikkben található meg.

IRODALOM

- [1] HAJÓS GYÖRGY: *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [2] DR. KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika II. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [3] HORVAY KATALIN—PÁLMAY LÓRÁNT: *Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [4] RÉDLING ELEMÉR: *A hasonlóság témakörének felépítéséről*. Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei VII., 1974.
- [5] RÉDLING ELEMÉR: *A párhuzamos szelők problémaköre*. A Matematika Tanítása, 1975/1.
- [6] RÉDLING ELEMÉR: *Geometriai transzformációk*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [7] RÉDLING ELEMÉR: *Hasonlósági transzformációk*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [8] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

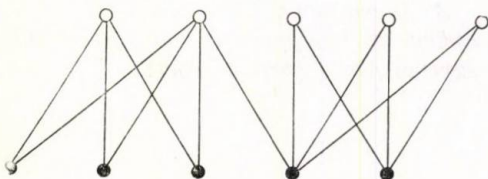
Hamisból minden következik

Errare humanum est. Mindenben. A matematikában is. Aki kutatásra adta a fejét, vagy nem tudta elkapni előle, nagyon jól tudja, hogy sokszor száz hamis sejtés és állítás közül bontakozik ki egy igaznak bizonyuló állítás. Van úgy, hogy az ember sejtése bizonyításának kicsikarásáért sáncolja körül sejtését hamis állításokkal. A kitervelt, kihámozott buktatókat már csak az elme fenése kedvéért is érdemes dédelgetni. Eugene P. Northrop *Rejtélyek a matematikában* című könyvét [6] kimondottan az ilyen fonák-ságoknak, paradoxonoknak szentelte. Székely J. Gábor *Paradoxonok a véletlen matematikájában* című könyve [7], tréfás szócsavarrással mondvá, pusztán a sztochoszból merített csalafintaságokból áll. No, és a maguktól is felbukkanó antinómiák: a matematika továbbfejlődésének lendkerekei! Megannyi buktató!

A kombinatorika, elsősorban a szemléletesnek tűnő gráfelmélet, különösen alkalmas terep tévedésekre. Sokszor meglehetősen nehéz megtalálni a félrevezető szemlélet mögött megbúvó logikai hasadékokat. A. B. Kempe, az igazán kitűnő matematikus pl. 1879-ben megoldást közölt a négy színsejtésre. Dolgozata 11 évig „élt”: csak 1890-ben derült ki, hogy rossz a bizonyítás. Nem kell azt gondolnunk, hogy a buktatók szövevényes gondolatsorok között bujkálnak. Tekintsük pl. a következő igaz, gráfelméleti tételt (l. [1], 105. oldal 17.)! *Bármely k -adfokú reguláris páros gráfrak van elsőfokú faktora, ha $k \geq 1$.* A tételben szereplő fogalmak megvilágítására: *páros a gráf*, ha pontjai két csoportba oszthatók úgy, hogy minden él két végpontja különböző csoportba tartozik; *reguláris a gráf*, ha minden pontjának ugyanaz a foka; *a gráf elsőfokú faktora* a gráf minden pontját tartalmazó olyan részgráfja, amelyben minden pont foka 1. A tétel szemléletes

interpretációban így is fogalmazható: ha egy vállalatnál minden dolgozó k -féle munkában kompetens és minden munkát k dolgozó tudna elvégezni, továbbá egy munkát csak egy ember végezhet el és egy ember csak egy munkával foglalkozhat, akkor a dolgozókat a munkákba lehet rendelni úgy, hogy mindenki dolgozzék és minden munkában dolgozzanak. Itt a páros gráf pontjainak két csoportját a dolgozók, illetve a munkák alkotják, a munkába rendelést pedig az elsőfokú faktor élei mutatják. A feltételekből adódik, hogy a dolgozók száma azonos az elvégzendő munkák számával.

Térjünk vissza e tétel eredeti megfogalmazásához! Szinte nyilvánvalónak tűnik: *egy páros gráfnak van elsőfokú faktora, ha minden pontjának foka legalább k ($k \geq 1$).* Ez azonban nem igaz egyetlen pozitív egész k -ra sem. Példaként $k=2$ mellett tekintsük az 1. ábrát: a páros gráf két pontcsoportjának pontjai fehérek, ill. feketék.

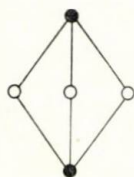


1. ábra

Néhány, röptiben elhintett hamis sejtés vagy állítás kikerülésének kedvéért természetesen nem helyes a gondolatok szárnyalásának korlátokat szabni. Ám a publikálás előtt kérlelhetetlen szigorral ellenőrizni kell minden állítást, különben könnyen válhatunk tévtanok hirdetőivé. Úgy tűnik, hogy Bereznai Gyulának a jelen folyóirat 1984. áprilisi számában megjelent Néhány gráfelméleti tétel egy

tőről eredeztetése című cikkét [3] nem előzte meg e kellő szigor. Szóképpel élve a szóban forgó tő egy hamis tétel, amely a logikai kalkulus ítélete szerint bármit fakaszthat: nemes rügyet is, vadhajást is. De félre a csevegéssel, elő a farbával!

Már a szóban forgó hamis tételt bevezető fogalomalkotás sem állja meg a helyét. Idézem: „A gráf élein és csúcsain kívül nagy szerepet fogunk tulajdonítani az általunk *elemi körnek* nevezett olyan köröknek is, amelyeknek egyetlen részgráfjuk sem kör, tehát amelynek nincs átlója.” Egy körnek valódi részgráfja sohasem kör, ha elemi az, ha nem, nem valódi része pedig mindig kör. A „tehát” szónak itt nincs helye. Az lehetséges, hogy a szerző elemi körnek az átlómentes vagy a húrmentes kört akarja nevezni. A K kör *húrján* olyan utat szokás érteni, amelynek végpontjai K -beliek, de élei és belső pontjai nem. Az egyetlen élt tartalmazó húr szokás *átlónak* nevezni. Mind-egyik esetre gondolva vizsgálódunk. Idézem a cikket tovább: „Az n szögpontot, e élt és k elemi kört tartalmazó G egyszerű gráf (Euler-féle) karakterisztikájának fogjuk nevezni az $n-e+k=K(G)$ számot” és a hamis tételt: „*az egyszerű G gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha karakterisztikája 1.*” Talán a leg-egyszerűbb ellenpélda a 2. ábrán látható.



2. ábra

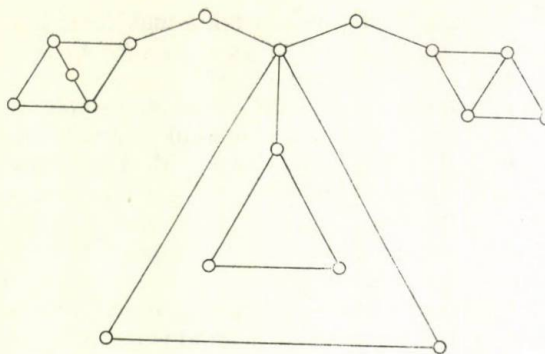
Ez a gráf összefüggő és mindhárom köre átlómentes, de $n-e+k=5-6+3=2$. Ennek általánosításaként ellenpélda bármely $n \geq 5$ mellett minden olyan teljes páros gráf, amelynek pontjait 2, ill. $n-2$ pontot tartalmazó csoportba osztjuk. Ekkor ugyanis $n-e+k=n-2(n-2)+\binom{n-2}{2} > 1$. Ha pedig átló helyett húrra kell gondolnunk, akkor e páros gráfok

egyáltalán nem tartalmaznak elemi kört, vagyis $k=0$, és így $n-e+k=4-n < 0$.

Persze rossz a tétel bizonyítása is. Az indukciós lépéshez csatlakozó állításokra könnyen konstruálhatunk ellenpéldákat. A cikk így folytatódik: „Most bebizonyított tételünk közvetlen következményeként adódnak az egyszerű összefüggő gráfok alábbi tulajdonságai:” Ha ezek közül szemügyre vesszük a cikk utolsó hasábjában szereplő Euler-féle poliéder-tétel levezetését, gondolom, elég jól kitapogathatjuk e cikk rugóját: elemi körökön a poliéder lapjainak határait érti. Horgonyozunk itt le!

Először is szeretném megragadni az alkalmat, hogy Euler tételét pontosan kimondjam.

Ha a gömbfelület topologikus képét egy gráf elemi felületekre bontja, akkor az elemi felületek 1 számúra, továbbá a gráf csúcsainak c és éleinek e számára fennáll a következő: $c-e+l=2$. Itt topologikus képen kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen limesztartó leképezést értünk, elemi felület pedig a körlap topologikus képe (l. mindezt [2]-ben). Mármost, ha a gömbfelület egy lapját kihúzzuk síklappá úgy, hogy a gráf erre topologikus képként terüljön ki, akkor valóban igaz, hogy e síklapon $c-e+l=1$. Ez a síkra megfogalmazott Euler-féle tétel formulája. A szóban forgó gráf pedig összefüggő. Van itt még egy kis általánosítási lehetőség is: ha s számú ilyen összefüggő gráfot egymáshoz nem csatlakoztatva rajzolunk a síkra, majd ezeket újabb köröket már létre nem hozó módon összekapcsoljuk utakkal egyetlen összefüggő gráffá, akkor az így kapott gráfra is érvényes lesz a $c-e+l=1$ formula. Ugyanis, ha az s számú tömböt (gráfot) még p számú új csúccsal és e számú új éllel egészítettük ki, akkor ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a kiegészítő gráf fagráf, amelyben a csúcspontok a p számú új csúcsponton kívül a tömbbé felhízlalt csúcsok. Ekkor azonban, a fagráf éleinek és csúcsainak számára vonatkozó összefüggést felhasználva, gráfunk Euler-karakterisztikája: $s+p-$



3. ábra

$-(s+p-1)=1$. Persze az óvatosság itt is rendkívül fontos! Tekintsük ugyanis a 3. ábrát! Ebben $s=4$, $p=2$. Az egész gráfra számolva a karakterisztikát, a lapok számát úgy kapjuk meg, hogy „ki-égetjük” a síkból a gráfot, és megszámloljuk, hogy hány lapocska (vagyis a körlap belsejének topologikus képe) hullik ki a síkból. Esetünkben tehát: $c-e+l=17-22+6=1$. A fonákság abból adódott, hogy egy elemi felület belsejében vettünk fel egy tömböt.

Tehát ilyen általánosabb formában is érvényes az Euler-féle poliédertétel, és nincs szükség arra, hogy bármelyik lapot határoló körnek kizárjuk akár húrját, akár átlóját. Az összefüggőség azonban fontos, hiszen minden komponens eggyel növeli a karakterisztikát.

Eulernek e tétele csak gömbfelület topologikus képére (ill. megfelelő módosítással síkra) érvényes. Bárki könnyen ellenőrizheti, hogy pl. tóruszra: $c-e+l=0$. Ismeretes Euler tételének tetszőleges felületre vonatkozó általánosítása is, amely szerint az Euler-karakterisztika topológiai invariáns, vagyis ha két felület egymásnak topologikus képe, akkor az Euler-karakterisztikájuk megegyezik (l. [5]-ben).

A kifogásolt tétel következményeként kimondott, mind síkgráfra mind nem síkgráfra vonatkozó tételek többsége helytálló. Ebből azonban nem adódik feltétlenül ellentmondás. De olvashatjuk ezt

is: „Egy gráf akkor és csakis akkor fa, ha bármely két pontja között csak egyetlen él van.” Az ebben szereplő feltételnek bármely teljes gráf is eleget tesz, pedig ugyancsak tartalmazhat kört. E hamis állítás könnyen korrigálható: egy gráf akkor és csakis akkor fa, ha bármely két pontja között pontosan egy út van. A következő, nem síkgráfokra vonatkozó tétel bizonyításában elhangzik e mondat: „Mivel a G_n gráfban van kör, van elemi kör is, s

ha ennek egy élet töröljük, az élek és az elemi körök száma egyaránt 1-gyel csökken, tehát a karakterisztika nem változik.” Ez sem igaz! Ha a 2. ábra bármelyik elemi körének bármely élet töröljük, az elemi körök száma 3-ról 1-re csökken. A 43. oldal első hasábjában olvashatjuk e tételt: „Az n szögpontú e élű egyszerű összefüggő gráf elemi köreinek száma $e-n+1$.” A 2. ábra sajnos ezt is cáfolja. Ha pedig csak síkba terített gráfra szabad gondolnunk, akkor ez az Euler-féle tétel. Végül a cikk utolsó előtti bekezdése így hangzik: „Egy nem szeparálható gráf bármely élet tekintjük is, ennek vagy az elhagyása, vagy az összehúzása nem szünteti meg a szeparálhatóságot.” A szeparálhatóságot többféleképpen lehet érteni. Itt ez nincs tisztázva, s így a tétel sem érthető.

Szokás mondani, hogy elegendő egyetlen hamis állítás és abból már bármi következik: igaz is, hamis is. Valójában zárhatnám ezzel cikkemet, de szeretnék e kijelítéshez néhány megjegyzést fűzni. Itt nem arról van szó, hogy a fenti hamis állítások valamelyikéből le tudjuk vezetni mondjuk a négyszínsejtés állítását is, meg annak tagadását is. A fenti kijelentés a formális logika nyelvén értendő. Ha az A állítás igaz és a B állítás hamis, akkor tartalmukban bármi is a kapcsolat közöttük, az $A \Rightarrow B$ implikációt hamisnak tekintjük. Ez természetes, de nem olyan természetes a többi eset — ezt szeretném megvilágítani.

Például a logikai és, azaz *konjunkció* (jele: $\wedge$) révén összekapcsolt állítás logikai értéke minden esetben független a benne szereplő állítások tartalmától, csak logikai értéküktől függ. Ezért van értelme pusztán a logikai értékek közötti $\wedge$ műveletnek, a szokásos műveleti táblázatban így leírt módon:

$\wedge$	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↓	↓

Ha ennek alapján pusztán a logikai értékek között akarunk implikációt definiálni, akkor a műveleti táblázatnak csak egyetlen eleme természetes:

$\Rightarrow$	↑	↓
↑		↓
↓		

A többi mező kitöltése komolyabb megfontolást igényel. Nos, e megfontolást szeretném pótolni némiképp természetes módon. Válasszuk ki az általános iskolában használatos logikai készletből mindazokat, amelyekre igaz a következő!

Ha nagy négyzet, akkor lyukas.

Mármost nyilvánvaló, hogy ez a mondat akkor és csak akkor *nem lesz megfelelő*, ha nagy négyzetet választottunk és az nem lyukas. Ez is indokolja az alábbi táblázatot:

$\Rightarrow$	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↑	↑

Itt a hamis előtagot jelentő alsó sorban mindkét esetben igaz a művelet eredménye. Hát ennek alapján szokás mondani, hogy a hamisból minden következik.

IRODALOM

- [1] ANDRÁSFAL B.: *Ismerkedés a gráfelmélettel*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [2] ANDRÁSFAL B.: *Matematika I/9, Vonalak és felületek topológiája*. Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar jegyzete, J 5—900, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971-től.
- [3] BEREZNAI GY.: *Néhány gráfelméleti tétel egy töről eredeztetése*. A Matematika Tanítása. XXXI. évfolyam 2. szám 1984. április, 41—43. oldal.
- [4] A. B. KEMPE: *On the geographical problems of the four colours*. Amer. J. Math. 2, 1879, 193—200. oldal.
- [5] KÖNIG D.: *Az analysis situs elemei (Felületek)*. A Magyar Tudományos Akadémia, Bp. 1918.
- [6] E. P. NORTHROP: *Rejtélyek a Matematikában (Paradoxonok könyve)*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1960.
- [7] SZÉKELY J. G.: *Paradoxonok a véletlen matematikájában*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.

Ujvári István: *Felkészülés és felzárkózás matematikából*
(általános iskolai szakköri füzet)

Ez a szakköri füzet elsősorban a 14—15 éves tanulók számára készült abból a célból, hogy — általános iskolai tanulmányaik utolsó félévében a középiskolai matematikára való felkészülést segítse,
— a nyári szünidőben ezeket az ismereteket némiképpen konzerválja, és
— a középiskola I. osztályában hétről hétre mozgósítsa az új anyag tárgyalásához szükséges előismereteket.

E hármas célkitűzésnek a füzet egy-egy része kíván eleget tenni.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984. (R. szám: 19029).

A folyamatábrákról

Bevezetés

Az iskolákba megérkeztek a *személyi számítógépek*. Többéves feladatot jelent a velük való megismerkedés, az oktatási anyagba való beépítés. Ehhez kívánunk segítséget adni ezzel a cikkel.

A diákokat meg szeretnénk tanítani egyszerűbb *programok készítésére*. A programkészítéshez szinte a nagyobb lépést megtette az, aki az eljárást (algoritmust) leíró *folyamatábrákat* megszerkesztette.

A folyamatábrák tanításának módszerei nem nagyon vannak kidolgozva. Aki érti őket, az úgy gondolja, hogy nincs szüksége a téma metodikai feldolgozására. Pedig ez nem így van. *Az algoritmusban való gondolkodás, a folyamatábra (blokkdiagram) szerkesztése egyrészt újszerű, szokatlan a diákoknak, másrészt erős logikát, absztrakciót, pontosságot követel.*

Munkahelyemen az 1983/84-es tanévtől integrált tárgyként kezdtük oktatni a matematikát és számítástechnikát. Először folyamatábrákat állítottunk össze, amelyekben a matematikaanyag jól algoritmizálható részeit dolgoztuk fel. Lelkesedésben nem volt hiány. Az I. féléves nagy zárthelyi során azonban *meglepetés* ért bennünket. A hallgatók közül sokan még csak meg sem próbálták a zárthelyiben feladott folyamatábrát megszerkeszteni.

Miben látom az okokat? Két okot már említettünk: az anyag szokatlan, erős logikát követel. Harmadiknak hozzátehetem: ez a témakör metodikailag kidolgozatlan, talán mi sem a legügyesebben adtuk még elő az anyagot. Azonban úgy gondolom: ha mindezen a tényezőkön túl leszünk, akkor is lesz a diákjainknak egy olyan rétege, akiknek ez a folyamatábrákban való gondolkodás nehéz.

Ezért mutatunk a cikkben néhány elgondolást arról, hogyan tanítsuk a folyamatábrák szerkesztését.

1. Polinom helyettesítési értéke

Sokan úgy gondolják: *elég, ha tanítványainknak kész folyamatábrákat mutatunk be, azokat jól elmagyarázva, megértetve.*

Itt lehet a blokkdiagram-készítés tanításában az egyik hiba. Néha ez a módszer is jó, különösen, ha nincs rá több idő. De ha mindig így csináljuk, akkor félok, hogy csak *passzív tudásra, egy adott folyamatábra lépéseinek értelmezésére* nevelünk, nem pedig *aktív tudásra, a folyamatábra megszerkesztésére, önálló programozásra*. Pedig a számítógéppel az tud bánni, aki az utóbbi fokozatig eljut.

Példaként bemutatom, hogyan lehet folyamatábrát adni *a racionális egész függvények helyettesítési értékének kiszámítására, az ún. Horner-eljárással.*

a) A

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

harmadfokú polinomban ismételten kiemelünk x -et azokból a tagokból, amelyekből

könnyen ki lehet emelni:

$$P_3(x) = (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0.$$

Ennek alapján a következő egyszerű számítási eljárás adható meg: a_3 -at meg kell szorozni x -szel, hozzáadni a_2 -t; az eredményt meg kell szorozni x -szel, hozzáadni a_1 -et; az eredményt meg kell szorozni x -szel, hozzáadni a_0 -t. *Többször kell tehát megismételni az alábbi lépéssorozatot:*

szorzás x -szel + a megfelelő a_i együttható

Szokták az eljárást az alábbi elrendezésben csinálni:

$$\begin{array}{r|rrrr} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ x & a_3 & a_3x + a_2 & (a_3x + a_2)x + a_1 & [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0 \end{array}$$

b) Számítsuk ki Horner-eljárással zsebszámológépen az előző $P_3(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ polinom helyettesítési értékét az $x=0,1$ helyen:

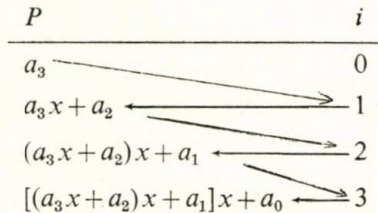
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 0 & 1 \\ x = 0,1 & 3 & -1,7 & -0,17 & 0,983 = P_3(0,1) \end{array}$$

Az „utasítások” zsebszámológépen *egy szorzás — egy összeadás ciklikus megismétléséből* állnak:

$$\begin{aligned} 3 \times 0,1 - 2 &= \\ \times 0,1 + 0 &= \\ \times 0,1 + 1 &= \end{aligned}$$

Mennyivel egyszerűbb ez, mint az előző számítások! És mennyivel rövidül a „gépido”!

Tekintsük át még egyszer a számítás menetét. A polinom helyettesítési értékét egy P tárolóban fogjuk kiszámítani, a lépések számát (a ciklusindexet) i tárolóban számoltatjuk. Lépésenként az alábbi értékeket tetetjük a két tárolóba:



Figyeljük meg, *mi történik a P tárolóban minden egyes lépésben*. Az 1. sorszámú lépésnél (amikor $i=1$) a P tároló eddigi értékét megszorozzuk x -szel és hozzáadunk a_{3-i} -t (vagyis a_2 -t). A 2. sorszámú lépésben ($i=2$) a P tároló előző értékét megszorozzuk x -szel és hozzáadunk a_{3-i} -t (vagyis most a_1 -t). A 3. lépésben ($i=3$) is ugyanezt csináljuk. Vagyis ciklikusan, többször ismételve az alábbi lépéssorozatot csináljuk:

a P tároló új értéke legyen:
 a P tároló előző értéke szorozva x -szel + a_{3-i}

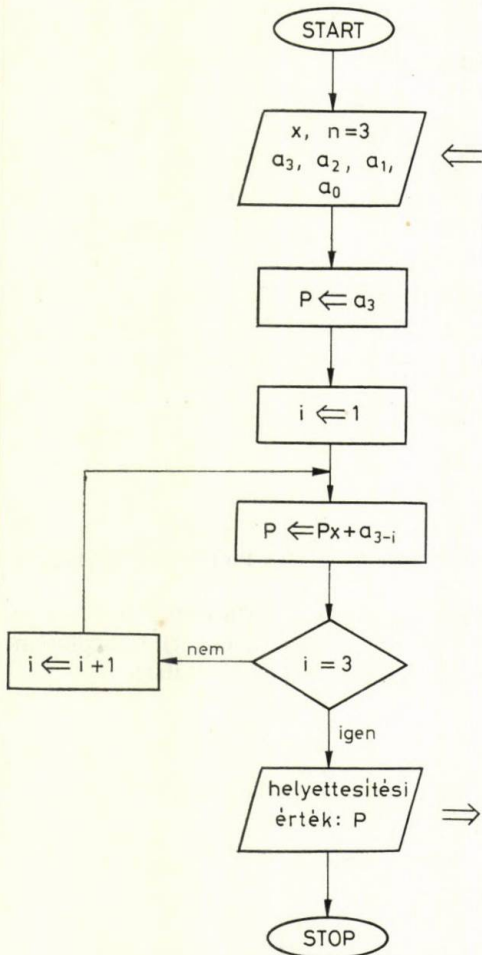
ezt képletben így szokás megadni:

$$P \leftarrow P + a_{3-i}.$$

Még egy lépés van, amit még ismételtünk: az i sorszámoló értékét mindig 1-gyel növeljük,

i új értéke legyen i előző értékénél 1-gyel nagyobb,

$$i \leftarrow i + 1.$$



Meddig ismételtük ezt a két lépést (mikor léphetünk ki a ciklusból)? Akkor, ha i értéke eléri a 3-at. A programot tehát kétfelé ágaztatjuk: ha i még nem 3, maradunk a ciklusban, ha i már 3, kilépünk belőle és kiíratjuk a polinom helyettesítési értékét (a P tárban legutoljára létrejött számot).

Egy-egy táriba be kell még íratni az x értékét, az a_3, a_2, a_1, a_0 együtthatókat, esetleg $n=3$ -at is megadhatjuk (bár nem lényeges), a P tár értékét az induló a_3 -ra, az i tár értékét az induló 2-re állítatjuk. Az 1. folyamatábra mutatja az eljárás lépéseit.

Feladat

1. Játsszuk végig, hogy a folyamatábra alapján az egyes lépésekben mi lesz a P és i tárolókban, mit ír ki a számítógép! (Erre céloztunk, hogy sokan így tanítják a folyamatábrát, a kész blokkdiagram megadása után értelmezik a számítás lépéseit.)

2. Szerkesztessünk a diákokkal folyamatábrát a $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom helyettesítési értékének kiszámítására, Horner eljárással!

1. ábra

2. Négyzetszámok összege

Tanítsuk meg a számítógépet az első n természetes szám összegének, az

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

összegnek a kiszámítására!

Nyilván a következőképpen számítjuk ki a keresett összeget.

	S tár értéke	i ciklus számláló értéke
Kiszámítjuk 1^2 -t	1	1
ehhez hozzáadjuk 2^2 -t	$1 + 4 = 5$	2
ehhez hozzáadjuk 3^2 -t	$5 + 9 = 14$	3
ehhez hozzáadjuk 4^2 -t	$14 + 16 = 30$	4

és így tovább, addig tart az összegezés, amíg a ciklusindex: $i = n$ nem lesz. Az eljárás során két lépés ismétlődött n -szer:

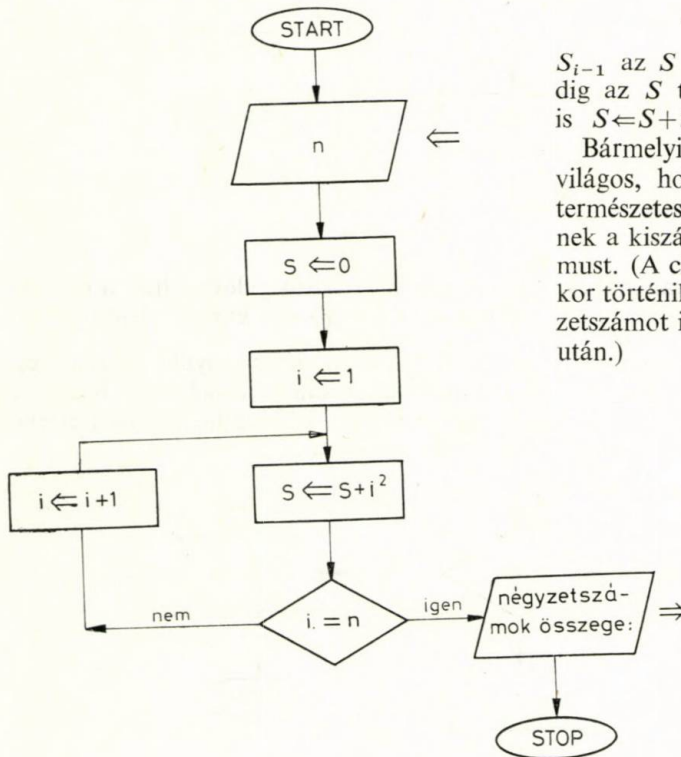
az S tár új értéke legyen az S tár előző értéke + az új négyzetszám	$S \leftarrow S + i^2$
i ciklusindex értéke legyen i előző értékénél 1-gyel nagyobb	$i \leftarrow i + 1$

De magyarázhatjuk a ciklust a képlettel is:

$$S_i = S_{i-1} + i^2.$$

S_{i-1} az S tár előző értéke, S_i pedig az S tár új értéke, tehát most is $S \leftarrow S + i^2$.

Bármelyik magyarázattal ellátva világos, hogy a 2. folyamatábra a természetes számok négyzetösszegének a kiszámítására ad meg algoritmust. (A ciklusból való kilépés akkor történik, amikor az n -edik négyzetszámot is hozzáadtuk, tehát $i = n$ után.)



2. ábra

Feladat

3. A 2. folyamatábrából kifejejtettük az $S \leftarrow 0$ lépést. Előző számításból a tárban 3,1415927 (π közelítő értéke) maradt, n értéke legyen 10. Írassuk ki, hogy a program lefutása során milyen értékek lesznek az S tárban!

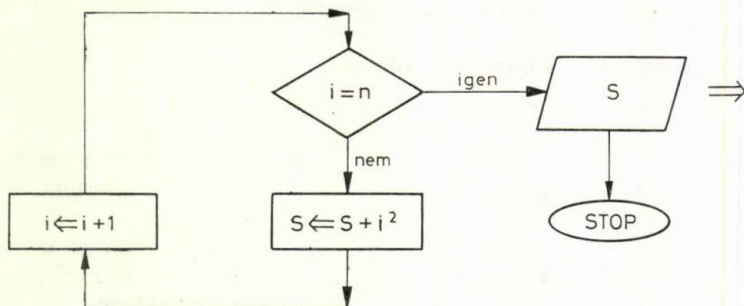
3. Folyamatábrák elemzése

A folyamatábrák tanításánál az alábbi feladattípusok a legfontosabbak:

- a) a folyamatábra létrehozatala,
- b) a kész folyamatábrán az algoritmus lépéseinek végigkövetése.

De még világosabbá teszi a tanultakat, ha egyéb problémátípusokkal is foglalkozunk:

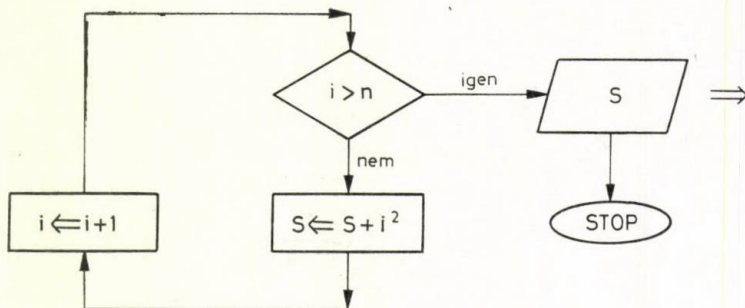
- Egy-egy blokk felcserélése a folyamatábrán belül milyen hatással jár a számításra,
- konkrét adatokat megadva eldöntendő, hogy kilép-e a program a ciklusból, vagy milyen értéket ír ki a számítógép stb.



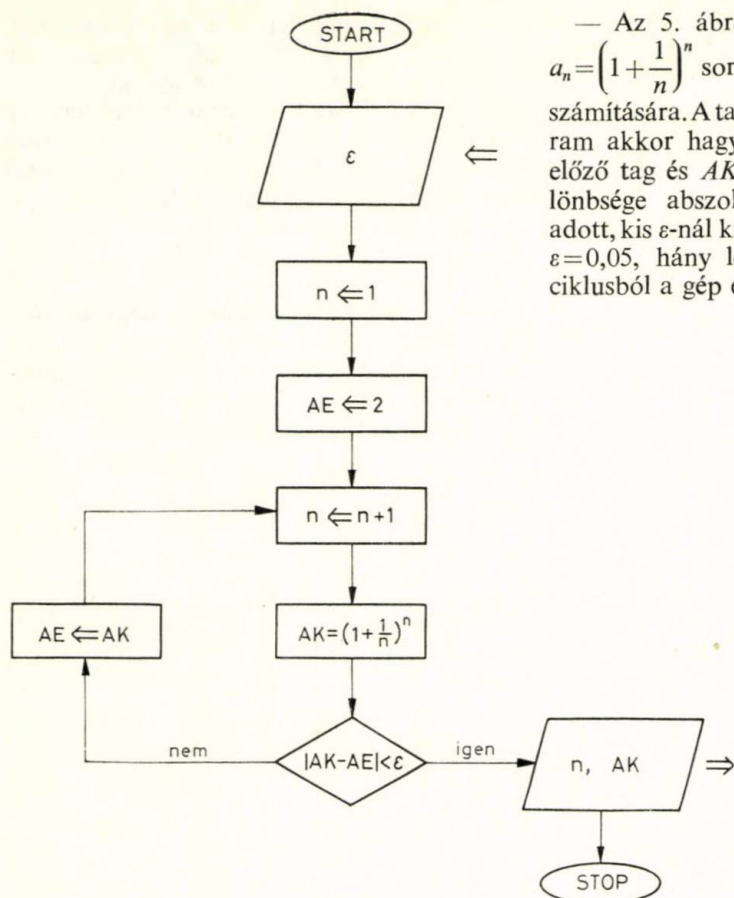
3. ábra

— A 3. ábrán a 2. folyamatábra ciklusát megváltoztattuk: előre tettük a döntési utasítást (annak a vizsgálatát, hogy i elérte-e az n -et). Mi lesz ennek a hatása?

Az, hogy az S tárolóban csak az első $n-1$ négyzetszám összege gyűlik össze, a gép $S = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$ értékét írja ki. Ha most az utasításokat helyükön hagyjuk, hogyan szüntethetjük meg a hibát? Csak akkor lépünk ki a ciklusból, ha i értéke nagyobb, mint n (vagyis eléri az $(n+1)$ -et), lásd a 4. ábrát.



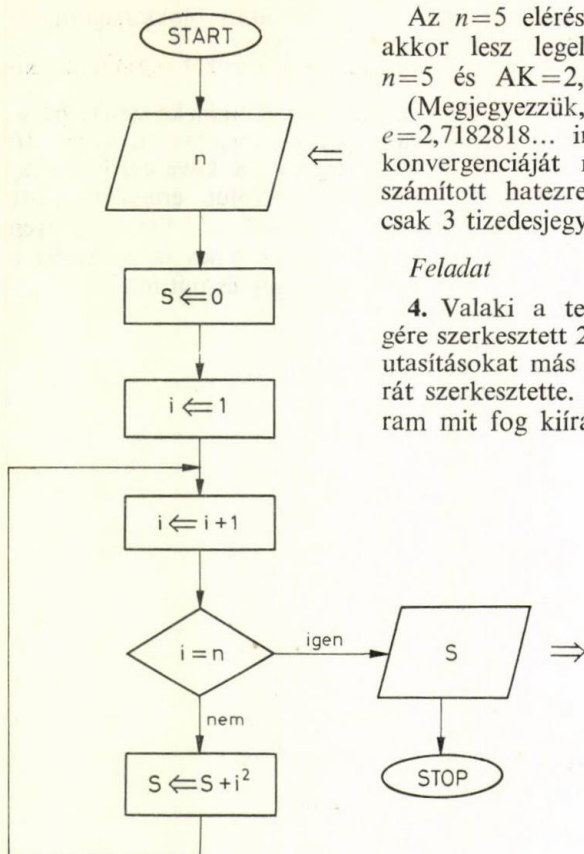
4. ábra



5. ábra

A folyamatábra alapján végig követhető, hogy az alábbi értékeket számítja a gép:

n	AK	$ AK - AE $
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$	
2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$	0,25
3	$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37037$	0,12037
4	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,441406$	0,071036
5	$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2,48832$	0,046914



6. ábra

Az $n=5$ elérése után lép ki a gép a ciklusból, akkor lesz legelőször $|AK - AE| < \varepsilon = 0,05$. Az $n=5$ és $AK=2,48832$ értékeket írja ki.

(Megjegyezzük, hogy a sorozat határértéke az $e=2,7182818\dots$ irracionális szám, a sorozat lassú konvergenciáját mutatja, hogy a számítógéppel számított hatezredik tag $a_{6000}=2,718042666\dots$ is csak 3 tizedesjegyre pontos.)

Feladat

4. Valaki a természetes számok négyzetösszegére szerkesztett 2. folyamatábra helyett (a ciklusutasításokat más sorrendbe írva) a 6. folyamatábrát szerkesztette. Az ennek alapján írandó program mit fog kiírni a számítógéppel?

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1077. Mely egész számpárok elégítik ki az alábbi egyenletet:

$$p + x + y + (p-1)xy = x^2 + y^2,$$

ha a p pozitív és prím?

Varga István, Nagyszalonta

1078. Az ABC háromszög magasságait jelölje rendre: m_a, m_b, m_c , a háromszög egy P pontjának az oldalaktól való távolságát pedig: d_a, d_b, d_c .

Bizonyítsuk be:

$$\min(m_a, m_b, m_c) \leq d_a + d_b + d_c \leq \max(m_a, m_b, m_c).$$

Dezső Gábor, Kolozsvár

1079. Melyek azok a tízes számrendszerbeli, a nullát jegyként nem tartalmazó öt-jegyű pozitív számok, amelyeknek számjegyei közé mindenütt ugyanannyi nullát írva négyzetszámot kapunk?

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1080. Melyik nagyobb: $a(\pi-2)^{\frac{1}{\pi-2}}$ vagy $a\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{9}{\pi}}$?

Bíró Béla, Barót

1081. Az $m \equiv n$ háromjegyű pozitív egészek a hetes számrendszerben. Bizonyítsuk be: ha az $\binom{m}{n}$ héttel osztható, akkor az n szám jegyei között van amelyik nagyobb, mint az m megfelelő jegye!

Cseh László és Merényi Imre, Kolozsvár

1082. Legyen $x \mapsto f(x)$ egy egész együtthatós polinomfüggvény, amely a változójának négy különböző x_1, x_2, x_3, x_4 egész értékére $f(x_i) = \alpha \in \mathbb{Z}$ ($i=1, 2, 3, 4$). Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan x egész, amelyre $f(x) = \alpha + 7$.

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (1053—1058.)

1053. Melyik az a 12 egymásutáni legkisebb hatjegyű természetes szám, amelyikre igaz, hogy közülük, a legnagyobb 12-vel, az annál eggyel kisebb 11-gyel, az ennél eggyel kisebb 10-zel, és így tovább, végül az utolsó előtti 2-vel osztható?

Horváth Tibor, Dunakeszi

Megoldás: Tekintsük a 2, 3, 4, ..., 11, 12 számok legkisebb közös többszörösét! $[2, 3, 4, \dots, 11, 12] = 27\,720$, ami ötjegyű. Ennek négyszerese, a 110 880 az a legkisebb hatjegyű szám, amelyet rendre 2-vel, 3-mal, ..., 11-gyel, 12-vel növelve a kívánt tulajdonságú 12 egymásutáni hatjegyű számot adja, mivel n a k -nak akkor és csak akkor többszöröse, ha az $n+k$ is k -nak többszöröse. Így a keresett számok: 110 881, 110 882, 110 883, ..., 110 891, 110 892.

*Bokor József, Szeged,
Medgyesi Zsuzsanna, Nagyrecse
és Zalán Péterné, Budapest*

A megoldók száma: 42.

1054. Oldjuk meg az egész számpárok halmazán az

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x^2 + xy + y^2).$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Egyenletünk, a hatványozás és rendezés után, az alábbival ekvivalens

$$5xy(x+y-1)(x^2+xy+y^2) = 0.$$

Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x = 0 \text{ vagy } y = 0, \text{ vagy } x + y - 1 = 0 \text{ vagy } x^2 + xy + y^2 = 0.$$

Az első három megoldáshalmaza rendre:

$$M_1 = \{(0, m) | m \in \mathbb{Z}\},$$

$$M_2 = \{(m, 0) | m \in \mathbb{Z}\},$$

$$M_3 = \{(m, 1 - m) | m \in \mathbb{Z}\}.$$

A negyedik egyenletet 4-gyel szorozva, a

$$(2x + y)^2 + 3y^2 = 0$$

alakban írjuk fel! Mivel nem negatív számok összege akkor és csak akkor nulla, ha a tagok mindegyike nulla, ezért

$$2x + y = 0 \text{ és } y = 0,$$

amiből $x = y = 0$. Ezt a megoldást azonban már az M_1, M_2 halmazok tartalmazzák. Az egyenlet megoldásait ábrázolva, a két koordinátatengely, továbbá az $y = 1 - x$ egyenletű egyenes rácspontjait kapjuk.

Bíró László, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 40.

1055. Az $A_1 A_2 \dots A_n$ húrsokszögben a_i jelölje az $A_i A_{i+1}$ oldalt ($A_{n+1} = A_1$), r a körülírt kör sugarát, k a sokszög kerületét, t pedig a területét.

Bizonyítsuk be, hogy

$$2rk < 4t + \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 2\sqrt{2}rk.$$

Pataki János, Szatmár

Megoldás: Szorítkozzunk egyelőre csak arra az esetre, amelyben a körülírt kör középpontja a húrsokszöghöz tartozik. Jelölje az $OA_i A_{i+1}$ háromszög területét t_i , továbbá legyen $\angle OA_i A_{i+1} = 2\alpha_i$. Ezekkel

$$a_i = 2r \sin \alpha_i, \quad t_i = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha_i$$

tehát

$$k = \sum_{i=1}^n a_i = 2r \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i,$$

továbbá

$$t = \sum_{i=1}^n t_i = \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i = r^2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$

Ezért

$$4t + \sum_{i=1}^n a_i^2 = 4r^2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \cos \alpha_i + 4r^2 \sum_{i=1}^n \sin^2 \alpha_i = 4r^2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i (\sin \alpha_i + \cos \alpha_i),$$

$$2rk = 4r^2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \text{ és } 2\sqrt{2}rk = 4\sqrt{2}r^2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i.$$

Mivel a $4r^2$ pozitív, ezért elegendő az

$$(1) \quad 1 < \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \leq \sqrt{2}$$

egyenlőtlenségláncot igazolni minden $0 < \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}$ szögre. Minthogy

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

és $\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \leq 1$, ahol az egyenlőség — ha x hegyesszög — csakis $x = \frac{\pi}{4}$ esetén áll, ezért az (1) jobb oldala igaz. Emellett

$$1 \leq \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

is teljesül, hiszen ha $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq \frac{\pi}{4}$, tehát

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ és egyenlőség is csak egyetlen esetben áll,}$$

$$\text{ha } x = \frac{\pi}{2}.$$

Ezzel beláttuk, ha a húrsokszög tartalmazza a körülírt kör középpontját, akkor teljesül a feladatbeli egyenlőtlenség-lánc és egyenlőség is csak akkor, ha a húrsokszög négyzet. Az 1. ábrán látható speciális esetben

$$4t + \sum_{i=1}^3 a_i^2 = (5 + \sqrt{3})r^2 < 2rk = (4 + 2\sqrt{3})r^2,$$

tehát erre a feladat állítása hamis!

A megoldók száma: 31.

1056. Igazoljuk: ha egy körüljárás szerint jelölt $ABCDEF$ konvex hatszög olyan, hogy $AB \perp BC$, $CD \perp DE$, $EF \perp FA$ és $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, akkor a hatszög minden támasztéglalapja négyzet!

Megoldás: Elegendő megmutatni, hogy ha az adott hatszöget két, egymásra merőleges — egyébként tetszőleges — egyenesre merőlegesen vetítjük, akkor a vetületeként kapott két szakasz hossza egyenlő (2. ábra: PQ és RS).

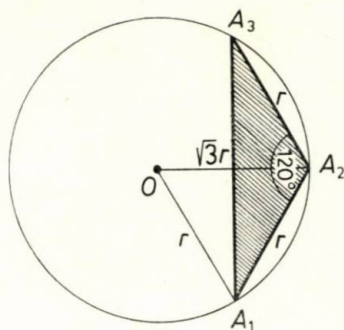
A konvexitásból következik, hogy az RS szakasz hossza fele akkora, mint a hatszög oldalainak az x egyenesre eső vetületi hosszának összege, s ugyanígy a PQ szakasz hossza is fele akkora, mint a hatszög kerületének az y egyenesre eső vetülete. A terület mindkét vetülete azonban háromszor két azonos hosszúságú, egymásra merőleges szakasz vetületeiből tevődik össze.

Ha két azonos hosszúságú, egymásra merőleges szakaszt az x és y egyenesre vetítjük, s a vetületi szakaszok hosszát összeadjuk, úgy ez az összeg az x és y egyenesen azonos. Ez abból következik, hogy ha a $\mathbf{v}(a; b)$ vektort pozitív irányba 90° -kal elforgatjuk, akkor a $\mathbf{v}'(-b; a)$ adódik. E két vektor x tengelyre eső merőleges vetületeinek összege (az első koordináták abszolútértékének összege) megegyezik az y tengelyen levő vetületeik összegével (a második koordináták abszolútértékének összegével). Az elmondottakból és a feladat feltételeiből tehát $PQ = RS$ következik. Az x és az y egyenesekből eltolással két-két támasz egyenes adódik, amelyek $RS = PQ$ miatt éppen négyzetet határoznak.

A megoldók száma: 21.

1057. A 8×8 -as sakktabla valamennyi mezőjét befestjük négy szín valamelyikével úgy, hogy bármely csomópontba illeszkedő négy mező különböző színű legyen. Lesznek-e a sarokmezők között azonos színűek?

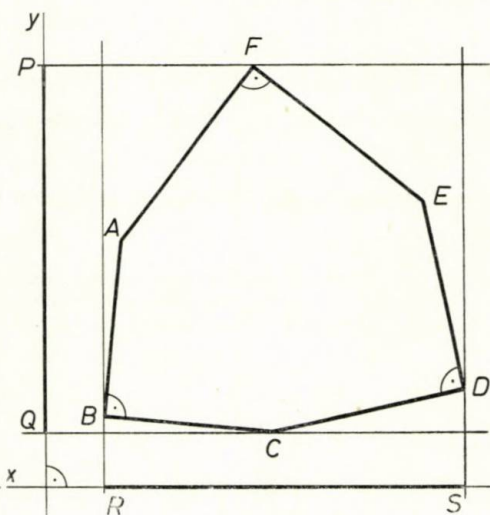
Megoldás: A feladatot az általánosabb $2m \times 2n$ ($m, n \geq 1$) méretű táblára oldjuk meg. Bebizonyítjuk, hogy bármely, a feladat feltételeinek megfelelő színezésre a négy sarokmező különböző színű.



1. ábra

Kamarás Lajos, Pécs

Kárteszi Ferenc, Budapest



2. ábra

Csorba Ferenc, Győr

A tábla bármely 2×2 méretű mezőjén mind a négy szín szerepel. Táblánkat tehát mn darab 2×2 -es mezőre bonthatjuk, ha pedig elhagyjuk a tábla négy szélső sorát, akkor a megmaradt részt $(m-1)(n-1)$ darab 2×2 -es mezőre darabolhatjuk. E két esetben az azonos színű mezőkből együttvéve $mn + (m-1)(n-1)$ darab van.

Ha táblánk alsó és felső sorát hagyjuk el, akkor $m(n-1)$ darab 2×2 -es mezőt nyerhetünk, míg ha a bal és jobb szélső oszlopokat vágjuk le, úgy $(m-1)n$ darab 2×2 -es mezőt nyertünk. E két módon csonkított táblákon az azonos színű mezők együttes száma $m(n-1) + n(m-1) = mn + (m-1)(n-1) - 1$.

Ez utóbbi két esetben az eredeti tábla szélső mezői — kivéve a négy sarokmezőt, melyet egyszer sem számoltunk — pontosan egyszer, míg a többi mező kétszer szerepelt. Ugyanakkor az első két esetben a szélső sorok mezőit egyszer, a többit kétszer számoltuk. A két összeg különbsége 1, vagyis a sarokmezőket nem számolva, az azonos színű mezők száma eggyel kevesebb, mint az eredeti táblán, tehát a négy sarokmező különböző színű.

Cseh László és Merényi Imre,
Kolozsvár

A megoldók száma: 18.

1058. Legyen $0 < a < b$. Bizonyítsuk be, hogy

$$e^{1-\frac{a}{b}} < \frac{b}{a} < e^{1+\frac{a}{b}},$$

ahol $\ln e = 1$.

Bereznai Gyula, Nyíregyháza

Megoldás: Az egyenlőtlenséglánc jobb oldala nem igaz, hiszen például az $a = 1$, $b = 10$ választásra

$$10 = \frac{b}{a} > e^{1,1}.$$

A javításra több lehetőség is van. Ezek egyikéről még szót ejtünk. A bal oldali reláció igazolására bevezetjük a $0 < \frac{a}{b} = x < 1$ jelölést. Ekvivalens átalakításokkal a

$$0 < e(e^{x-1} - x)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^{x-1} > x.$$

Mivel az e^{x-1} valamennyi deriváltja ön maga és ezért pozitív, ennél fogva az $x \mapsto e^{x-1}$ alulról szigorúan konvex és az $x \mapsto x$ függvény görbéje az előbbi függvény görbéjének $(1, 1)$ pontbeli érintője. Ezek figyelembe vételével $e^{x-1} > x$ bármely $0 < x < 1$ -re, és ezt kellett bizonyítanunk. A jobb oldali egyenlőtlenség vizsgálatához ábrázoljuk az $x \mapsto e^{x+1}$ és

az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényeket (3. ábra). A $\frac{b}{a} < e^{1+\frac{a}{b}}$

egyenlőtlenség csak az $\frac{a}{b} = x$ -re vonatkozó további megszorítással érvényes. Legyen x_0 az

$$e^{x+1} = \frac{1}{x}$$

egyenlet gyöke. A gyök egy felső közelítő értéke $x = 0,278\,464\,6$, melynek hibája kisebb 10^{-7} -nél. Figyelembe véve, hogy az $x \mapsto e^{x+1}$ szigorúan mo-

noton növekedő, az $x \mapsto \frac{1}{x}$ pedig szigorúan monoton csökkenő az $x > 0$ intervallumon, az eredeti relációlánc jobb oldalának helyességéhez a $0 < x_0 < \frac{a}{b} = x < 1$, azaz a $0 < bx_0 < a < 1$ feltételnek is teljesülni kell.

Boda Miklós, Pécs

A megoldók száma: 30.

A megoldók névsora (1053—1058.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1053., 1055., 1057., 1058.); Bagi Gábor, Barcs (1053.); Bege Antal, Csíkszereda (1053—1058.); Bencze Mihály, Brassó (1054., 1055., 1058.); Bíró Béla, Barót (1053—1055., 1057., 1058.); Bíró László, Székelyudvarhely (1053—1058.); Bischofné Szabó Klára, Veszprém (1053.); Boda Miklós, Pécs (1055., 1058.); Bogdán Zoltán, Cegléd (1053—1058.); Bokor József, Szeged (1053—1056., 1058.); Cseh László, Kolozsvár (1053—1055., 1056., 2 mód, 1057., 1058.); Csorba Ferenc, Győr (1053—1058.); Dezső Gábor, Kolozsvár (1053., 2 mód, 1054., 1055., 3 mód, 1056., 1058., 2 mód); Gögh József, Gúta (1053—1058.); Görbe Mária, Budapest (1056.); Hajna János, Pécs (1053—1055., 1058.); Hársptakiné Dékány Veronika, Budapest (1053., 1054.); Honti Dénesné, Győr (1053—1055., 1058.); Hornyák Pál, Érsekújvár (1053., 1054., 1056.); Hortobágyi János, Bonyhád (1053—1055.); Horváth Tibor, Dunakeszi (1053., 1054.); Illés Istvánné, Kiskunfélegyháza (1053., 1055.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1053—1056., 1058.); Kamarás Lajos, Pécs (1053—1058.); Kondor Judit, Budapest (1055., 1056.); Kondor László, Dunaújváros (1053., 1054., 1058.); Kulcsár Lászlóné, Szücs (1053.); Dr. Major Pál, Budapest (1054.); Medgyesi Zsuzsanna, Nagyréce (1053., 1054., 1057.); Merényi Imre, Kolozsvár (1053—1058.); Mészáros József, Galánta (1053—1055., 1057., 1058.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1053., 1054.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1054., 1058.); Németh László, Vasvár (1053., 1054.); Nyíró László, Mezőkövesd (1053—1055., 1058.); Oláh György, Rév-Komárom (1053., 1054.); Pataki János, Szatmár (1053—1058.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1053., 1054.); Simon József, Csíkszereda (1053—1058.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1053., 1058.); Spissich László, Pápa (1053—1055., 1057., 1058.); Szánthó Gyula, Gyula (1053., 1055., 1057., 1058.); Szigeti Béláné, Győr (1053., 1054.); Szőke István, Szatmár (1054., 1055.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1054—1056., 1058.); Udvari Tibor, Baja (1053—1058.); Varga István, Nagyszalonta (1053—1056., 1058.); Zalán Péterné, Budapest (1053., 1054.); Zabrádiné Schmierer Emília, Győr (1053—1055.); Zsidó György, Kolozsvár (1053., 1054., 1056., 1057.).

Lapunk 1983. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük. A jutalmazottak:

Ambrus Gabriella, Budapest,
Bencze Mihály, Brassó,
Cseh László, Székelyudvarhely,
Hajna János, Pécs,
Illés Istvánné, Kiskunfélegyháza,

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely,
Merényi Imre, Kolozsvár,
Polcz Katalin, Pécs,
Szánthó Gyula, Gyula,
Tuzson Zoltán, Marosvásárhely,

ÚJ KÖNYVEK

- BRADBEER, R.—DEBONO, P.—LAURIE, P.: *Műsoron a számítógép*. Budapest, 1984, Műszaki Könyvkiadó, 212 oldal, 90,— Ft.
- DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Matematikai analízis, Feladatgyűjtemény* (5. kiadás). Budapest, 1984, Tankönyvkiadó, 295 oldal, 34,— Ft.
- GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Mátrixaritmetikai gyakorlatok* (2. kiadás). Budapest, 1984, Tankönyvkiadó, 442 oldal, 57,— Ft.
- ILL MÁRTONNÉ (szerk.): *Matematika*. Továbbképzési anyag a kombinatorika 1—4. osztályos anyagának tanításához. Baja, 1983, Tanítóképző Főiskola, 88 oldal, ár nélkül.
- IMRECE ZOLTÁNNÉ (szerk.): *Számítástechnikai eszközök az iskolában*. Veszprém, 1982, Országos Oktatástechnikai Központ, 199 oldal, 23,— Ft.
- PÓLYA GYÖRGY: *Matematikai módszerek a természettudományokban*. Budapest, 1984, Gondolat Könyvkiadó, 284 oldal, 48,— Ft.
- RÉVÉSZ PÁL: *Mennyire véletlen a véletlen?* (Értekezések, emlékezők.) Budapest, 1984, Akadémiai Kiadó, 39 oldal, 16,— Ft.
- VOLGIN, V. V.—KARIMOV, R. N.: *Korrelációs módszerek az ipari szabályozástechnikában*. Budapest, 1984, Műszaki Könyvkiadó, 105 oldal, 23,— Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

ORGTECHNIK HUNGARIA BUDAPEST '84

A Szervezési és Vezetési Tudományos Társaság, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja, 1984. november 13-tól 17-ig rendezi meg

ORGTECHNIK HUNGARIA BUDAPEST '84

elnevezésű, nemzetközi részvételű, szervezési eszközöket és azok alkalmazását bemutató szakkiállítását.

A kiállítás helye: BUDAPEST SPORTCSARNOK.

Tematikája:

- Az információörögzítés, -továbbítás és -tárolás eszközei.
- A reprográfia eszközei.
- Az okmányok és iratok nyilvántartásának, rendszerezésének és kezelésének eszközei.
- Az adatfeldolgozás eszközei.
- A termelésirányítás eszközei; diagnosztikai és veszteségmérő készülékek.
- A korszerű munkahelyek kialakítása irodákban és üzemekben (robottechnika).
- Irodai berendezések, felszerelések, irodaszerek.
- Szervezéstechnikai software, üzemszervezés, termelésszervezés.
- Szervezési szakirodalom.

A szakkiállítás tematikája alapján először kerül megrendezésre az elmélettel és gyakorlattal foglalkozó, nemzetközi részvételű konferencia. Célja, hogy hazai és külföldi előadók közreműködésével ismertesse a szervezéstechnikai eszközöket, számítógép-alkalmazásokat és azok gyakorlati bemutatását.

A kiállítás és a konferencia felett védnökséget vállalt az Ipari Minisztérium és az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság. Sokoldalúan segíti a Külkereskedelmi Minisztérium, a METRIMPEX Külkereskedelmi Vállalat és a MIGÉRT; az MTESZ tagegyesületei közül a Gépipari Tudományos Egyesület, a Neumann János Számítógéptudományi Társaság stb.

A kiállítás és a konferencia jelentős fórumot és ismeretforrást nyújt a felhasználók, kiállítók és a konferencia résztvevői számára. Elősegíti:

- a szervezés és vezetés korszerű módszereinek,
- a gazdaságosság, versenyképesség jelenlegi és további lehetőségeinek megismerését,
- a piaci információszerzést,
- a gyártók—kereskedők—felhasználók közvetlen kapcsolatának elmélyítését,
- a meglévő kapcsolatok erősítését, szélesítését,
- új kooperációs kapcsolatok és lehetőségek feltárását.

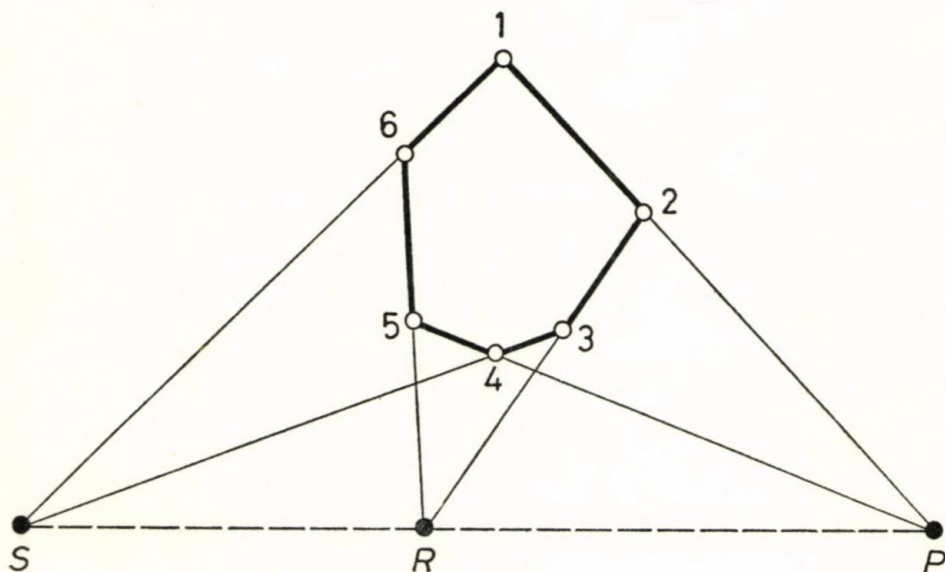
A vállalatoknál, intézményeknél nagy az érdeklődés a piaci versenyképesség és piacképesség reprezentatív bemutatóján, valamint az elméleti és gyakorlati kérdésekkel foglalkozó konferencián való részvétel iránt. A kiállításra eddig 74 hazai és 21 külföldi vállalat, intézmény jelentette be részvételét; a konferencia előadóinak előrelátható száma: 65 hazai és 11 külföldi.

Tájékoztatónkkal az 1046/1976. MT. számú határozat végrehajtását kívánjuk elősegíteni: „A sajtó, a rádió és a televízió a szakemberek számára nyújtott információk növelése mellett segítse elő a széles közvélemény érdeklődésének felkeltését és ennek révén a jelen határozatban foglalt feladatok társadalmi összefogással és felelősséggel történő végrehajtását.”

Felvetődő kérdésekre készséggel ad felvilágosítást a kiállítás Rendező Bizottsága: Budapest Sportszarnok, Népstadion út 2.; 1143. Telefon: 635-411. Telex: 22-5600.

A Matematika Tanítása

A Művelődési
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



1984. december * XXXI. évfolyam

6

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:

HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY
KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT,
DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI
GUSZTÁVNÉ, SZTÁNÓ TAMÁS

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

84-3959 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a
Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V.,
József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalván-
nyon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi
jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33.— Ft. Egyes
példányok beszerezhetők az 1055 Budapest Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 5,50 Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66
betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő
adatokat is:

a) személyi számukat, b) asszonyok leánykori
nevüket, c) lakáscímüket — irányítószámmal,
d) foglalkozásukat (beosztásukat), e) munka-
helyük pontos megnevezését, f) munkahelyük
címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Tóth Imre: Egy 8. osztályos reprezentatív matematika-felmérés és felejtésvizsgálat tapasztalataiból	161
Katz Sándor: Függvények a középiskola első osztályában	167
Dr. Kárteszi Ferenc: A tér tudománya	174
Szerényi Tibor: Beszámoló a tanárképző főiskolák 1983. évi matematikai tanulmá- nyi versenyről II.	177
Gárdos Éva: LOGO programozási nyelv mint a számítástechnika oktatásának egyik új eszköze	180
FELADATOK	185

СОДЕРЖАНИЕ

Тот Имре: Из опыта репрезентативного рассмотрения и исследования забыва- ния в математике у восьмиклассников	161
Кац Шандор: Функции в первом классе средних школ	167
Д-р Картези Ференц: Наука о простран- стве	174
Сереньи Тибор: О математическом сорев- новании 1983 г. педагогических инсти- тутов II.	177
Гардос Эва: Язык программирования LOGO как одно из новых средств об- учения вычислительной технике	180
ЗАДАЧИ	185

INHALT

Tóth, Imre: Aus den Erfahrungen einer repräsentativen Mathematik-Ermessung und Vergeßlichkeitsuntersuchung in den 8. Klassen der Grundschule	161
Katz, Sándor: Funktionen in der ersten Klasse der Mittelschule	167
Dr. Kárteszi, Ferenc: Die Raumlehre	174
Szerényi, Tibor: Bericht über den mathe- matischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1983 — II.	177
Frl. Éva Gárdos: Die Programmierungs- sprache LOGO als ein neues Mittel zum Unterricht der Computertechnik	180
AUFGABEN	185

A matematikatanítás

MÓDSZERE

TÓTH IMRE
vezető szakfelügyelő
Nyírbogdány

Egy 8. osztályos reprezentatív matematika-felmérés és felejtésvizsgálat tapasztalataiból

Az 1980/81. tanév utolsó tanítási hetében (június 10-én) megyénk 32 iskolájának mindegyik 8. osztályos tanulója kiterjedő felmérést végeztünk matematikából, melyben 1471 tanuló vett részt. A felmérésen a szaktanáron kívül matematika- vagy más szakos szakfelügyelő vagy tanulmányi felügyelő is jelen volt.

Felmérésünket — azonos feladatokkal — az 1981/82. tanév elején (október 20-án) a középfokú iskolák megismételték az általános iskolai felmérésben részt vett tanulókkal. A feladatlapok értékelésekor 908 tanuló eredményeit dolgoztuk fel, ami az eredetileg felmért tanulók 61,7%-a.

A feladatlapok javítását a matematikaszakos szakfelügyelők végezték — a tanév végén nyíregyházi matematika-tanárok bevonásával —, a középiskolaiakat kizárólag a szakfelügyelők. Ez úton is köszönetet mondunk mindazoknak a kollégáknak, akik valamilyen módon segítettek ezt az igen nagy jelentőségű munkát.

Az érdemjegyre való átszámítást az elért pontokból az alábbiak szerint végeztük:

34—36 pont	94,4%—100%	jeles (5),
27—33 pont	75,0%—94,4%	jó (4),
18—26 pont	50,0%—75,0%	közepes (3),
10—17 pont	27,7%—50,0%	elégséges (2),
0—9 pont	0%—27,7%	elégtelen (1).

A tanév végén elért megyei teljesítmény 58,6% — kereken 59% —, ami 1 %-kal jobb az OPI által az 1978/79. tanévben végzett 8. osztályos felmérésnél, azaz közelítőleg megfelel az országos átlag-

A feladatlap 8 feladatot tartalmazott az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv követelményei alapján, melyből 4 minimum (készség), 4 optimum (jártasság) szintű volt. A feladatokat 36 pontértéket tartalmazó részegységekre bontottuk. A megoldásra egy tanítási óra állt rendelkezésre — a szervezéssel együtt — a közepesekhez tervezve. A jeleknek, a jóknak rövidebb idő is elég volt, de az elégségesek több feladat megoldását el sem kezdték. A feladatok „A” és „B” variánsban készültek, amelyek azonos nehézségű feladatok voltak, célnk ezzel az önálló munka biztosítása volt. Két általános iskolából kaptunk visszajelzést arra vonatkozóan, hogy a tanulók zsebszámológépet használtak, illetve használni akartak, ami még nem engedhető meg. — A zsebszámológép általános iskolai használatára vonatkozó kísérlet 7—8. osztályos tanulókkal jelenleg is folyik Budapesten.

Összehasonlításra azért is van lehetőségünk, mert 3 feladat teljesen azonos, egy pedig hasonló volt az országos feladatokkal, az elérhető pontok értéke, az egy pont megszerzéséhez szükséges idő

közelítőleg megegyezett. Az elért eredmény elfogadható, de nem megnyugtató, ha figyelembe vesszük azt az egységes követelményt, amely szerint az optimumból (jártasságból) 60%—70%-os, a minimumból (késztségből) 80%—90%-os teljesítményt kellene elérnie a tanulóknak.

A középiskolai felmérés teljesítményeinek megyei átlaga 54,2%-os, aminek alapján a felejtés mértéke kerekített értékkel 5%-os, de iskolánként nagy a szórádás, ami a +16 és -22 között változik, vagyis volt olyan általános iskola, amelynek tanulói a középiskolai mérés-kor 16 százalékkal jobb eredményt értek el, de volt olyan is, ahol a középiskolában nyújtott teljesítmény 22%-kal rosszabb. Olyan tényező, hogy milyen középiskolába ment a tanuló, ezt a teljesítményt nem befolyásolhatta.

A tanulók teljesítményét az elért és az elérhető pontok aránya alapján számítottuk ki százalékban. Például egy 20-as létszámú osztály elért 381 pontot, teljesítménye $381 : 720 = 0,529 = 52,9\%$. A 720 az elérhető pontok számát jelenti: $36 \times 20 = 720$.

Kiemelkedők az eredmények a következő tárgykörökből:

— tizedes tört tizedes törttel való szorzása,

— a különböző nevezőjű törtek közös nevezőre hozása,

— az algebrai azonosság (két tag szorzása) értelmezése,

— a lineáris függvények ábrázolása,

Az osztályzatok (érdemjegyek) százalékos megoszlása

	8. o. év végén (osztályzat)	8. o. felmérés (érdemjegy)	I. o. felmérés
5 (jeles)	13,4%	15,2%	4,9%
4 (jó)	20,8%	21,4%	25,7%
3 (közepes)	26,5%	26,5%	28,1%
2 (elégséges)	37,3%	19,5%	21,2%
1 (elégtelen)	1,8%	17,1%	19,8%
Teljesítmény	61,3%	59,4%	54,9%.

Jelentősebb eltérés két esetben van. A középiskolai felmérés-kor kevés tanuló kapott jelest. A felmérésekre adott elég-

— három halmaz metszeteinek képzése.

Az eredmények az országos átlagnál gyengébbek és abszolút számokban is alacsonyok az alábbiakból:

— különböző alakú (tizedes és közőnséges) törtekkel végzett műveletek,

— az algebrai kifejezés számértékének kiszámítása,

— racionális számok műveleteinek elvégzése,

— százalékszámítás, a százaléktértek és a százalékláb kiszámítása.

Az előbb felsorolt tárgykörök intenzívebb tanítása mindannyiunk számára konkrét feladatot jelent, mert ezek a hiányosságok a felmérésből kimaradt iskolákban is tapasztalhatók.

Az általános iskolai felmérés teljesítményeit a tanulók tanév végi osztályzataihoz is viszonyítottuk. Az általunk adott érdemjegyek alapján év végén a teljesítmény: 59,4%, az év végi osztályzatok alapján várható volt 61,3%. Kerekített értékek 2%-os eltérést mutatnak, ami egyáltalán nem jelentős, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy az érdemjegy a 8 feladatra adott, az osztályzat pedig több szóbeli és írásbeli érdemjegyből, teljesítményből összegeződött.

A pontok alapján kiszámított teljesítmény: 58,6%, ha ezt összehasonlítjuk az előbb említett — érdemjegyek alapján kiszámított — teljesítménnyel, akkor egészekre kerekítve azonos értéket kapunk: 59%.

telenek száma közelítően 10-szerese az év véGINEK, ebből következően egyértelmű az a feladat, hogy a minimum köve-

telmények teljesítése döntő legyen az osztályzatok kialakításában.

A járási-városi egységek között év végén 16,1%-os eltérés volt a megyei átlagtól, ami a 8,8%-kal jobb és a 7,3-del rosszabb teljesítményekből adódott, a középiskolai méréskor az 14,1%. — +10,3 és —3,8%. — A középiskolai méréskor az átlagtól való elmaradás felényi mértékűre csökkent, a vidéki egységek között 3,5 százalékos nivellálódás van, majdnem azonos szinten vannak. (Ebből arra is következtethetünk, hogy a középiskolákban a felmérések során jobban tudtak egzakt feltételeket biztosítani.)

Az egyes iskolák közötti különbségek a nyújtott teljesítmények alapján 36—80%-ig, a középiskolákban 34—68%-ig szóródtak; ezek az értékek mindkét esetben igen nagyok. Év végén négy, összesen öt iskola teljesítménye nem érte el a 40%-ot. (Tunyogmatolcs, Vásárosnamény 2. sz., Nyírcsászári, Nyírgyulaj—Nyírcsászári, Szatmárcseke, Nyírgyulaj, Nagydobos, Nyírvasvári.)

Az év végén kapott osztályzatok alapján várható eredménytől is jelentős eltérések vannak; 20%-os elmaradás és 25%-os túlteljesítés is van.

Most nézzük meg a feladatokat és az azokban elért teljesítményeket! (Csak az „A” variáns feladatait ismertetem, de a megyei teljesítményeket teljességében: A+B együtt.)

1. feladat. Végezd el a következő műveleteket!

$$a) \quad -\frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{7}{4} - \frac{1}{6} =$$

Összevonás

Közös nevezőre hozás

Hibátlan

8. osztály

57,9%

67,3%

40,3%

I. osztály

62,4%

70,8%

40,0%.

A tanulók közül nagyon kevesen végezték el először a hatodok és a negyedek összevonását, hanem a négy taggal közös nevezőre hozták a kifejezést, és csak utána végezték el az összevonást, ami az eredményekből jól látható, hogy kb. 10%-kal kisebb sikerrel.

A részeredményekhez képest alacsony a hibátlan megoldások száma, annak nem az egyszerűsítés vagy az átalakítás elmaradása az oka, hanem az, hogy az összevonást két részben végezték, és az első (egyenlő előjelűek összevonása) után megálltak, vagy az átalakítást, vagy az egyszerűsítést rosszul végezték.

A nagy eltérésekből arra következtethetünk, hogy az osztályozás nem minden iskolában reális, vagy a felméréshez nem tudtak megfelelő körülményeket biztosítani. Ahol nagy a lemaradás az átlagtól, és a nyújtott teljesítmények is alacsonyak, ott a tanári követelmények alacsonyak, amelyeket fokozatosan és következetesen emelni kell. 20%-ot meghaladó a várhatótól az eltérés (Kocsord, Nyírmeggyes), a lemaradás is két iskolában érte el a 20%-ot (Kékse, Nagydobos), még 7 iskolában haladta meg a lemaradás mértéke a 10 százalékot, ahol az okokat külön is vizsgálunk kell, mert 10%-ig sok szubjektív tényező is lehet az ok, ami a feltételek, követelmények változtatásával könnyen változtatható, de azon felül objektív okok vannak.

Az 5%-os megyei felejtésen belül is 38%-os szóródás van az egyes iskolák között. Az év végihez képest 10%-ot meghaladó a javulás három iskolában (Nyírbétek, Nyírbátor 2. sz., Nyírtass), a felejtés a mátészalkai járás két iskolájában a 10%-ot, másik két iskolában a 20%-ot is meghaladja. (Ezeket a felejtéseket is érdemes mélyebben megvizsgálni.)

1. b) feladat. $0,6 \left(0,25 - \frac{1}{2} \right) =$

	8. osztály	I. osztály
Átalakítás egyező törtalakra	52,6%	54,2%
A kivonás elvégzése	37,0%	36,3%
A szorzás elvégzése	28,6%	24,5%
Hibátlan	25,2%	23,1%.

Az egyező alak szinte minden esetben tizedes tört volt, a többi részhez viszonyítva még aránylag sikeres, amit osztás nélkül hajtottak végre. A kivonásban a nagy visszaesést sok tanulónál az okozta, hogy a kivonást is leírás nélkül végezte el, de az is problémát jelentett, hogy a kivonás eredménye mindkét variánsban negatív szám lett volna, ha a tanulók nem a nagyobb abszolút értékű számot veszik ki-sebbitendőnek. A szorzás alacsonyabb szintje hibás előjel miatt adódott.

1. c) feladat. $24,6 \cdot 1,09 =$

	8. osztály	I. osztály
A részletszorzatok jók	75,1%	79,4%
A tizedesvessző elhelyezése jó	80,2%	82,7%
Hibátlan	69,2%	74,1%.

Ennek a feladatnak az eredménye jobb az országos átlagnál, a tanulóknál nem felejtés, hanem érés következett be.

1. d) feladat. $8,156 : 0,75 =$

	8. osztály	I. osztály
Egész számmá alakítás	70,2%	74,6%
Tizedesvessző elhelyezése jó	66,4%	67,5%
A hányados jegyei hibátlanok	50,5%	57,5%
Az osztás hibátlan	44,5%	53,5%.

Jelentős az érés, de az eredményt erősen fokozni kell.

2. feladat. Számítsd ki az algebrai kifejezés számértékét, ha

$$a = -3, \quad b = * + 2. \quad \frac{a^2 - b}{3a}$$

	8. osztály	I. osztály
Hatványozás	47,3%	50,6%
Összevonás	49,9%	51,4%
Szorzás a nevezőben	52,6%	53,7%
Hibátlan	30,4%	31,8%.

Az eredmények akkor is alacsonyak, ha azt nézzük, hogy a hatványozás jártasság szintű követelmény, a feladatban az első nehézséget ez okozta. Sok volt a hiba az értelmezésben is. Pl.: $3^2 = 6!$ Gyakori volt az ellenkező előjel is.

3. feladat. Töltsd ki a táblázatot!

	alap	százalék	százalékérték
a)	250 Ft	12 %	
b)	400 kg		80 kg

a)

	8. osztály	I. osztály
Az összefüggést felismerte	70,4 %	65,1 %
Hibátlan megoldás	42,2 %	54,6 %

Az összefüggés felismeréseként kevesen írtak képletet, ami nem hiányosság, mert az elvégzendő művelet vagy műveletek sorrendjét elfogadtuk. A hibátlan megoldások alacsony százaléka többségében a százalék jelének (%) vagy a mértékegységnek (Ft) az elhagyása miatt következett be.

b)

	8. osztály	I. osztály
Az összefüggést felismerte	58,7 %	52,6 %
Hibátlan megoldás	61,3 %	49,1 %

A százalékláb kiszámításában az év végihez viszonyítva jelentős, több mint 10%-os visszaesés van. A tanulók feladatlapjainak megvizsgálása után azt állapítottuk meg, hogy a „fejbeli” számolás helyett sokkal többen vállalkoztak a feladat írásbeli megoldására, és a 400-at osztották 80-nal, az így kapott ötödrészt nem fejezték ki századrészekben, százalékban.

4. feladat. Oldd meg a következő egyenletet!

$$2(x+4)-1 = x+5$$

	8. osztály	I. osztály
A beszorzás (azonosság) elvégzése jó	64,7 %	50,2 %
Összevonás, rendezés	56,4 %	43,2 %
Hibátlan gyök	48,6 %	34,4 %

Ilyen egyszerű egyenlet megoldásából alacsony az 50% alatti teljesítmény, mert a tantervi követelmény készség. A néhány hónap után bekövetkező, 15%-ot megközelítő felejtés újabb figyelmeztetés az alaposabb, tartalmasabb munkára. A nyitott mondatok megoldásában már az alsó osztályokban igen szép eredményeket érnek el. A felső tagozatban minden évfolyamon foglalkozunk nyitott mondatok, egyenletek megoldásával, tehát van elég érési idő. Az egyenletek megoldásának ellenőrzésében jártasság a követelmény, ezért azt ebben a feladatban nem vettük figyelembe pontértékkel, természetesnek tartottuk, hogy a tanulók többsége saját érdekében végez ellenőrzést. Az önellenőrzésre nevelés állandó nevelési feladat. A tanulók külön felhívás nélkül alig végeztek ellenőrzést, ami 10–20% között van.

5. feladat. Melyik nagyobb és mennyivel?

$$(-20):(+5) \text{ vagy } (+5):(-20)$$

	8. osztály	I. osztály
Az első osztás jó	64,5 %	63,1 %
A második osztás jó	51,8 %	49,8 %
A reláció felírása	57,9 %	50,8 %
A két hányados különbsége (2 pont)	23,4 %	26,1 %
Hibátlan	22,5 %	21,6 %.

Az első osztás eredménye még elfogadható, a másodikban a 10%-os esés nem indokolt. A reláció felírása jobb, mint a műveletek jó elvégzése, ez abból adódik, hogy még a hányadosok felírásával sem indokolták azok helyességét, ezért nem lehetett egyértelműen következtetni arra, hogy az előjeles számok osztását helyesen végezték-e el.

Ebben a feladatban és az egész felmérésben a legnagyobb problémát a két hányados különbségének megállapítása okozta: $\left(-\frac{1}{4}\right) - (-4)$, pedig a megoldás számegyenes segítségével is nagyon egyszerű. Sok volt az előjelhiba is, mert mindenáron a nagyobb abszolút értékű számot akarták kisebbitendőnek venni.

6. feladat. Mekkora a kúp térfogata, ha alapkörének sugara 7 cm, magassága 9 cm?

	8. osztály	I. osztály
Az összefüggés (képlet) felismerése	77,2 %	47,3 %
Számítások elvégzése	63,9 %	40,9 %
Hibátlan végeredmény mértékegységgel	46,7 %	25,3 %.

Az összefüggés felismerése jó, a hibátlan megoldások száma már nem, a felejtés pedig ebben a feladatban a legnagyobb (21,4%); ennek egyik oka az, hogy a felmérést megelőzően frissen tanult ismeret volt.

7. feladat. A 3; 8; 12; 15; 20; 30; 60 számokat helyezd el a halmazábrába — ami adott volt —, hogy az „A” halmazba a 3-mal, a „B”-be a 4-gyel és a „C”-be az 5-tel osztható számok kerüljenek!

	8. osztály	I. osztály
A három halmaz metszetébe írt szám jó	68,5 %	77,9 %
Részhalmazok (3 pont)	75,2 %	73,2 %
Hibátlan megoldás	56,7 %	62,3 %.

Ez is azt mutatja, hogy a halmazokba rendezés nem jelent problémát, mind a tanárok, mind a tanulók szívesen és eredményesen foglalkoznak vele.

8. feladat. Ábrázold az $y = 2x - 1$ függvényt!

	8. osztály	I. osztály
Az értéktáblázat elkészítése	74,7 %	68,2 %
A függvény képe	69,2 %	64,3 %
Hibátlan megoldás	66,6 %	61,4 %.

A lineáris és nem lineáris függvények ábrázolásában a tantervi követelmény jártasság, a 66,6%-os hibátlan megoldás kiemelkedő a többi feladathoz viszonyítva, ugyanakkor a kívánt szintet is eléri.

A felejtés mértékét összességében minimálisnak tartjuk, azt azonban nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a gimnáziumokban és a szakközépiskolákban a tanév elején megoldatták a tanulók felzárkóztatásához tájékozódást nyújtó központi feladatsorokat. A felzárkóztatásra a felmérésig közel 2 hónap állt rendelkezésre. A gimnáziumokban olyan feszítő az elvégzendő anyag mennyisége, hogy az általános iskolai alapok ismétlésére nincs idő, a szakközépiskolákban a tanári szabadság függvénye, de a felzárkóztatás mindkét iskolatípusban feladat. A szakmunkásképzőkben pedig a tanév elején az 1. osztályokban két hónapot kell az általános iskolában tanultak ismétlésére fordítani. Mindezek a tények kedvezően befolyásolták azt, hogy a felejtés ilyen alacsony fokú, mert enélkül — véleményünk szerint — sokkal nagyobb lett volna. Egy biztos: minél alaposabb az általános iskolai tanulók

tudása, annál kisebb a felejtés mértéke attól függetlenül, hogy mikor vizsgáljuk azt.

A 8. osztályos és a középiskolai felmérések egyik legfőbb tanulsága, hogy a racionális számokkal végzett alpműveletek tudásának szintje — az ideiglenes tanterv követelményeinek megfelelően — nem mindenben éri el a kívánt szintet. Az általános iskolákban mindegyik matematikával foglalkozó tanító, tanár, iskolavezető, szakfelügyelő legfontosabb feladata, hogy a minimum szintű követelményekből biztos alapot adjon a továbbhaladáshoz. Ennek érdekében az új tanterv kezdeti tanítása során az optimum követelmények gyakorlásának csökkentésével, a kiegészítő anyag elhagyásával fokoznunk kell az alapok gyakoroltatását, hogy a középiskola minél kevesebb felzárkóztatási nehézséggel oldja meg feladatát.

KATZ SÁNDOR
középiskolai tanár
Bonyhád, Petőfi Sándor Gimnázium

Függvények a középiskola első osztályában

A függvénytanítás célja

A század elején a Beke Manó vezette reformbizottság egyik legfontosabb javaslata a függvényszerű gondolkodásmód kialakítása volt: „Természetfelfogásunk leglényegesebb alkotó eleme a mennyiségek közötti összefüggés. Ez az a kép, mely a természetben lefolyó dolgokat ábrázolja. Kell, hogy e kép olvasásában minden művelt ember gyakorlott legyen. A függvényszerű gondolkodás előkészítését már az első osztályban meg kívánjuk kezdeni.” [1]

Ma is időszerűek ezek a gondolatok; fontos célunk, hogy olyan függvényfogalmat alakítsunk ki, amely segít a valóságban végbemenő folyamatok megismerésében, amely más tantárgyakban és a mindennapi életben jól alkalmazható.

Ezen túlmenően a matematika tananyag rendszerében is központi szerepet szánunk a függvényeknek. Olyan függvényfogalmat és alkalmazási szintet kívánunk kialakítani, amely a hagyományos (egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok megoldása stb.) és az újabban alkalmazott területeken (transzformációk, logika, számítástechnika stb.) egyaránt segíti az ismeretek elsajátítását, amely alkalmas rendszerező szempont, és amely megfelelő előkészítést nyújt a felsőbb matematikai ismeretekhez.

Alkalmas-e ezeknek a céloknak a megvalósítására a gimnáziumi tananyag? 1979-ben, amikor a jelenlegi gimnáziumi tantervek és tankönyvek bevezetésre kerültek, még a tanulók jelentős része

(84%-a, [2]) a régi általános iskolai tanterv ismereteivel került a középiskolába. Ez a régi tanterv halmazokkal nem foglalkozott, függvényekkel is csak nagyon keveset, erre alapozva a fenti céloknak megfelelő függvényfogalom kialakítása nehezen volt elképzelhető. 1982-től már minden felső tagozatos az ideiglenes vagy az új tanterv szerint tanul, és 1986-tól már csak olyan tanulók végeznek az általános iskolában, akik 8 évig az új tanterv szerint tanulták a matematikát. Az új tantervek

halmaz- és függvényszemlélete már jobb alapokat biztosít a fenti célok megvalósításához.

Ezeket a célokat és lehetőségeket figyelembe véve a gimnáziumi első osztályos függvénytan tanítását két területen látjuk szükségesnek módosítani. Egyrészt a korábbinál általánosabb függvényfogalmat kívántunk kialakítani, másrészt a tananyag jobb rendszerezésével próbáltuk hatékonyabbá tenni az elemi függvények tanítását.

A halmazelméleten alapuló általánosabb függvényfogalom a középiskolában

A matematika tanításában a függvény fogalmának meghatározására két módszer is szokásos. Az egyik szerint a hozzárendelés, megfeleltetés fogalmát definícióra nem szoruló alapfogalomként kezeljük, és a függvényt egyértelmű hozzárendelésként definiáljuk. Mivel ez a hozzárendelés intuitív fogalmán alapul, nevezzük ezt intuitív függvényfogalomnak. A másik módszer a rendezett pár (definált vagy alapfogalomként kezelt) fogalmára vezeti vissza a hozzárendelést

(ebben a tárgyalási módban inkább a reláció kifejezést használjuk) és a függvényt: „Rendezett párok halmazát relációnak (hozzárendelésnek, megfeleltetésnek) nevezzük.” Vagy a Descartes-szorzat segítségével: „Az $A \times B$ halmaz valamely részhalmazát az A és B halmazok közötti relációnak nevezzük.”

A reláció függvény, ha nem tartalmaz azonos első elemmel rendelkező párokat. Ez utóbbit szokás halmazelméleti definíciónak nevezni.

Milyen lehetőségeink vannak a középiskolában a függvényfogalom kialakítására?

1. *Csak az intuitív fogalmat* építjük ki. Ez a jelenlegi tantervek, tankönyvek koncepciója. (Bár a Korányi-féle IV. osztályos tankönyvekben — csak valós függvényekre — szerepel a halmazelméleti definíció is, ennek alkalmazására azonban nem kerül sor.)

2. A matematikával való ismerkedés kezdetétől fogva úgy alakítjuk a reláció és a függvény fogalmát, hogy a tanulók számára természetes legyen, hogy ez rendezett párok halmazát jelenti; és *csak a halmazelméleti definíciót* adjuk meg. Az általános iskolai ideiglenes tankönyvek valami ilyennel próbálkoztak [3], de ez túl elvontnak bizonyult. Az új tantervek és tankönyvek a halmazelméleti és intuitív fogalmat párhuzamosan fejlesztik, és az általános iskolában célszerűbb intuitív definíciót fogalmaznak meg [4]. Még középiskolában sem lenne célszerű csak a halmazelméleti definíciót használni, mert ez önmagában túl absztrakt, távol esik a funkcionális függésről alkotott mindennapi elképzelésektől. Csak az intuitív fogalomra alapozva célszerű kialakítani a halmazelméleti függvényfogalmat. (Erről ír részletesebben Varga Tamás [5]-ben.)

3. A függvényekkel való ismerkedés *korai szakaszában* (pl. általános iskolában és a gimnázium első két osztályában) csak *az intuitív definíciót* adjuk meg, de a függvényfogalmat úgy fejlesztjük, hogy *később* (pl. *fakultáción*) a *halmazelméleti definíciót* is megadhatjuk, alkalmazhatjuk. Ezt a módszert alkalmazzák pl. a Szovjet-unióban.

4. *A kétféle függvényfogalmat párhuzamosan fejlesztjük*, a középiskola első osztályában mindkét definíciót megfogalmazzuk, később pedig mindig azt a definíciót alkalmazzuk, amelyik az adott problémához kézenfekvőbb.

Az elmúlt években a 2. kivételével az összes módszert több osztályban kipróbáltuk és a 4. módszert találtuk legeredményesebbnek. Az ezzel kapcsolatos tapasztalatokból ismertetünk néhányat.

Miért célszerű, ha a tanulók ismerik a halmazelméleti függvényfogalmat?

Csak az intuitív fogalom tanítása általában azzal jár, hogy a tanulók szemében a függvény a szabály fogalmával azonosul. Ha viszont a halmazelméleti definíciót is ismerik, nyilvánvalóbb lesz számukra a függvények sokfélesége, általánosabb függvényfogalom alakulhat ki. Nem erősödnek meg olyan, később már nehezen megváltoztatható nézetek, hogy a függvény grafikonja mindig vonal, hogy a függvények néhány kivételes helytől eltekintve folytonosak stb. A halmazelméleti függvényfogalom ismeretében természetes lesz a tanulók számára, hogy a függvénytani módszerek alkalmazhatók minden olyan területen, ahol összetartozó párokkal találkozunk, akkor is, ha nem ismernek olyan szabályt, amely az adott párokat állítja elő. Minden ilyen területen, (nemcsak a matematikában!) érvényesülhet a függvényszerű gondolkodás, a függvény operatív fogalommal válhat.

Sok probléma egyszerűbbé válik a halmazelméleti definíció ismeretében.

Például:

Mikor tekintünk két függvényt azonosnak?

Mit értünk egy függvény grafikonján?

Mit értünk egy függvény inverzén?

Mit értünk két függvény szorzatán (összesített függvényén)?

Ezenkívül sok feladat megoldása is egyszerűbbé válik a halmazelméleti függvényfogalom ismeretében. Így az az idő- és energiatöbblet, amit a függvényfogalom kialakítására fordítunk, néhány probléma egyszerűbb kezelhetőségével bőven megtérül.

Miért célszerű már első osztályban megfogalmazni a halmazelméleti definíciót?

Az általános iskolában az ideiglenes és az új tantervek tanulásával kialakul-

nak a feltételei annak, hogy az intuitív függvényfogalom kialakulása mellett felismerjék a tanulók, hogy a függvény rendezett párok halmazaként is értelmezhető. Azok az anyagrészek, amelyek a halmazelméleti fogalom kialakulását segítik (szabályjátékok, függvényképző automaták stb.), kedveltek a tanulók körében, a középiskola első osztályában még jól lehet ezekre az ismeretekre építeni.

Az első két év anyagában sok olyan rész van (függvény grafikonjának értelmezése, inverzfüggvény fogalmának kialakítása, geometriai transzformációk), amelyekben segíthet, ha a függvényt rendezett párok halmazaként is értelmezzük.

A jelenlegi fakultációs rendszerben a leendő orvosok, biológusok, vegyészek, agrármérnökök többsége nem tanulja a matematikát fakultatív tárgyként. Ha az első két évben nem alakítunk ki általános, sok területen alkalmazható függvényfogalmat, akkor ez a nem fakultatív csoportokban aligha sikerülhet. A fentebb már említett téves függvénykép helyrehozása pedig még a fakultációs órákon is nehéz.

Milyen szerepet kapjon a halmazelméleti fogalom a függvények tanításában?

A halmazelméleti függvényfogalom tananyagba építésének egyfajta minimális programja lehet az, hogy a függvényfogalom kialakításánál felhívjuk a figyelmet arra, hogy a függvény rendezett párok halmazaként is felfogható, és később, ahol nagyon kézenfekvő (függvény grafikonja, inverze), ott utalunk erre az értelmezésre, de pontos definíciókat nem adunk.

Az általánosabb, szélesebb körben használható függvényfogalom kialakításához azonban arra is szükség van, hogy rámutassunk, rendezett párok minden olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemű párokat, függvény. Egy teljesebb, jól alkalmazható halmazelméleti függvényfogalom kialakításához definíciókra is szükség van. Elképzelhető, hogy az összes függvénytani fogalomnál végigvisszük a kettős definíciót, de ez

egyelőre túlzott program lenne. A legcélszerűbbnek azt találtuk, hogy a hozzárendelés és a függvény fogalmánál az intuitív és a halmazelméleti definíciót is megadtuk (az ekvivalencia igazolására

nincs szükség, hiszen csak az utóbbi tekinthető egzakt definíciónak, a másik csak körülírás), később pedig mindig csak azt a fogalmat használtuk, amelyik egyszerűbb volt.

Az első két évben a következő halmazelméleti definíciók megfogalmazását láttuk célszerűnek:

Rendezett párok halmazát hozzárendelésnek (relációnak) nevezzük. A párok első elemeinek halmazát a hozzárendelés értelmezési tartományának, a második elemek halmazát a hozzárendelés értékkészletének nevezzük. Egy H hozzárendelés értelmezési tartományát $D(H)$ -val, értékkészletét $R(H)$ -val jelöljük.

A H hozzárendelést X és Y halmazok közötti hozzárendelésnek nevezzük, ha $D(H) \subset X$ és $R(H) \subset Y$. Az X halmazt kiindulási halmaznak, az Y halmazt képhalmaznak nevezzük. Eszerint $H \subset X \times Y$.

Két hozzárendelést azonosnak tekintünk, ha azonos párokat tartalmaznak.

Az $(x; y)$ pár inverzén az $(y; x)$ párt értjük. Egy H hozzárendelés inverzén a hozzá tartozó párok inverzeinek halmazát értjük és H^{-1} -gyel jelöljük. Rövidebben:

$$H^{-1} := \{(y; x) | (x; y) \in H\}.$$

Rendezett párok olyan halmazát, amely nem tartalmaz azonos első elemű párokat, függvénynek nevezzük.

Ha a függvényt f -fel jelöljük, akkor azt, hogy $(x; y) \in f$, úgy is írhatjuk, hogy $f(x) = y$ (ez nem függvényjelölés!), és azt mondjuk, y az f függvény x -hez tartozó vagy x helyen felvett értéke.

Az értelmezési tartomány (jele D_f), az értékkészlet (jele R_f), az X kiindulási halmaz és az Y képhalmaz értelmezése a fentiekkel azonos. Ha valamely f függvény esetén $D_f \subset \mathbf{R}$ és $R_f \subset \mathbf{R}$, akkor f -et valós függvénynek nevezzük.

Descartes-féle derékszögű xy koordináta-rendszerben egy f valós függvény grafikonjának nevezzük mindazoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre $(x; y) \in f$.

Az f függvényt leképezésnek nevezzük, ha $X = D_f$. (Tehát ugyanaz a függvény egyik kiindulási halmazon (D_f -en) leképezés, másikon nem.)

Ha egy f leképezés esetén $Y = R_f$, akkor f X -nek Y -ra való leképezése; ha $Y \neq R_f$, akkor f X -nek Y -ba való leképezése.

Ha egy f függvény nem tartalmaz azonos második elemmel rendelkező párokat, akkor egy-egyértelműnek vagy kölcsönösen egyértelműnek nevezzük, szokás invertálható függvénynek is nevezni, de az invertálható szó nem azt jelenti, hogy f -nek létezik inverze (minden hozzárendelésnek van inverze), hanem azt, hogy f inverze is függvény. Ha f invertálható függvény, akkor az

$$f^{-1} = \{(y; x) | (x; y) \in f\}$$

függvényt az f függvény inverzének nevezzük.

Ha adott egy f függvény és egy $A \subset D_f$ halmaz, akkor az

$$f_A = \{(x; y) | x \in A \wedge (x; y) \in f\}$$

függvényt az f függvény A halmazra való leszűkítésének nevezzük. (Logikusabb és kifejezőbb lenne leszűkítés helyett részfüggvényről beszélni.)

Ha adottak az f és g függvények, akkor a két függvény szorzatának (kompozíciójának, összetett függvényének) nevezzük az

$$f \circ g = \{(x; y) | \exists z; (x; z) \in g \wedge (z; y) \in f\}$$

függvényt, és az $f \circ g$ függvény x helyen felvett értékét $(f \circ g)(x)$ -szel, vagy $f(g(x))$ -szel jelöljük.

A fogalomrendszer több irányban is tovább fejleszthető. Például ki lehet térni az identikus leképezés fogalmára, az inverz és a kompozíció kapcsolatára. Mindezek a geometriai transzformációk vizsgálatánál és több más területen is jól alkalmazhatók.

Azokban az osztályokban, ahol nem e szerint a koncepció szerint kezdtük el a függvények tanítását, a szakkörök vagy az ún. szabad sávós órák jó lehetőséget jelentettek a halmazelméleti függvényfogalom kialakítására.

Az elemi függvények tanításának egy lehetséges rendszerezése

A közelmúltban az általános és a középiskolában is több indokolt módosítás, új témakör vagy fogalom bevezetése azzal járt, hogy a hagyományos ismeretekre kevesebb gondot fordítottak, ezért az új ismeretek bevezetése sem járt kellő eredménnyel. Pl. a Korányi-féle első osztályos tankönyv függvénytani része egy következetes jelölési rendszer megalkotására koncentrál, de kialakított függvényképe szegényes, igen kevés függvényt ismernek meg a tanulók. Hiányoznak pl. a pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények, lineáris törtfüggvények.

A tananyag logikus rendszerezése lehetővé teszi, hogy ugyanannyi energiával egyszerre több, hasonló tulajdonságú függvényt ismerjenek meg a tanulók, így a tartalmi és formai változtatások mellett a hagyományos ismeretek sem szenvednek csorbát. Az elemi függvények tanítását kézenfekvő az őket meghatározó kifejezések típusa szerint rendszerezni.

Ezért a függvényeket megelőző „Számhalmazok, aritmetika” című fejezetben a számhalmazokkal együtt vizsgáltuk a nekik megfelelő kifejezéseket is (egész számok — egész kifejezések, törtek — törtkifejezések stb.).

Az elemi függvények tanításában fontos célunk volt, hogy a megismert függvények tulajdonságait igazoljuk is a definiáló kifejezés segítségével. Így világosabbá válnak a tanulók előtt a kifejezések és függvénytulajdonságok közötti összefüggések. Sikerült elérni, hogy egyszerűbb egész és törtfüggvények tulajdonságairól, grafikonjáról már a részletesebb vizsgálat elkezdése előtt legyen elképzelésük a tanulóknak. Az elemi függvények alapos ismerete nemcsak a többi tantárgy számára nyújt nélkülözhetetlen segítséget, hanem a matematika tanulásának szinte minden területén biztonságot jelent a tanulóknak.

Az első osztályos függvénytani anyagot a következő hat kisebb egységre osztva tárgyaltuk.

1—3. óra: A függvény fogalma.

Különböző hozzárendeléseket vizsgáltunk, majd felvetettük a kérdést, hogyan lehetne ezeket rendszerezni. Nyíldiagramok rajzolása, rendezett párok felírása után kézenfekvőnek látszott az egyértelműség szerinti csoportosítás. Megadtuk a függvény, a valós függvény, a grafikon, az inverzfüggvény definícióját. A függvények megadási módjáról, a lehetséges függvényjelölésekről beszéltünk. Abban állapodtunk meg, hogy kifejezéssel adott valós függvények esetén elhagyhatjuk az értelmezési tartomány kiírását, ha az a valós számoknak az a legbővebb részhalmaza, amelyen a kifejezés értelmezhető.

4—7. óra: Hatványfüggvények, a függvények vizsgálatához szükséges fogalmak.

Az x, x^2, x^3, x^4, x^5 kifejezésekkel definiálható valós függvényeket ábrázoltuk értéktáblázattal. Megfogalmaztuk tulajdonságaikat, majd amit tudtunk, a kifejezés segítségével igazoltunk. Ehhez a szemlélet alapján megfogalmazott tulajdonságok (növekedés, minimum stb.) pontos definíciójára is szükségünk volt. Adott tulajdonsággal rendelkező vagy nem rendelkező grafikonokat könnyen rajzolnak a gyengébb tanulók is, így sok példával és ellenpéldával fokozatosan jutottunk el a pontos definíciókig. Jó lehetőség adódott itt a kvantorok használatának gyakorlására is. (Lásd [6]!)

8—9. óra: *Lineáris függvények.*

Megmutattuk, hogy az $x \mapsto ax + b$ alakú függvény képe egyenes. Igazoltuk a lineáris függvények tulajdonságait (pl. szigorúan monoton, ha $a \neq 0$; páratlan, ha $b = 0$). Vizsgáltuk a lineáris, elsőfokú, konstans, egyenes arányosságot kifejező függvényhalmazok egymáshoz való viszonyát. Az egyenes arányosságot az általános iskolából ismertnek tekintve csak néhány ismétlő kérdéssel elevenítettük fel.

10—13. óra: *Másodfokú függvények, függvénytranszformációk.*

Másodfokú függvények segítségével vezettük be a transzformációkat. (Ez is jórészt ismert az általános iskolából, ezért célszerű első osztályban alkalmazni.) Megmutattuk, hogy egy-egy adott művelet (pl. pozitív szám hozzáadása a függvényértékhez) tetszőleges függvény grafikonjának ugyanazt a transzformációját eredményezi. Transzformációval ábrázoltunk még néhány magasabb fokú polinommal definiálható egészfüggvényt (pl. $(x+1)^3, x^4-1$), majd beláttuk, hogy pl. az x^3-x függvény már nem ábrázolható az x^3 függvény lineáris transzformációival, szélsőértékei grafikus összeadással sem határozhatók meg, ezért később más függvényvizsgálati módszerekre is szükség lesz.

14—16. óra: *Törtfüggvények.*

Először az $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$ kifejezésekkel definiálható valós függvényeket vizsgáltuk, majd a lineáris törtfüggvényeket. Átalakítással tetszőleges $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ alakú függvényt tudtunk ábrázolni, vizsgálni. Végül itt is vizsgáltunk néhány más törtfüggvényt (pl. $\frac{1}{x^2+1}, \frac{x^2}{x^2+1}, \frac{1}{x^2-1}$).

17—20. óra: *Néhány nem elemi függvény.*

Transzformációval és felbontással ábrázoltunk többféle, abszolútértéket tartalmazó függvényt. Az $[x], \{x\}, \operatorname{sgn} x$ függvények mellett néhány olyan függvényt is vizsgáltunk, amelyeknek grafikonjáról a tulajdonságaik nem olvashatók le, illetve grafikonjuk egyetlen intervallumon sem rajzolható meg.

$$\text{Pl.: } f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad q > 0, \quad (p; q) = 1, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

E függvények vizsgálatának igen fontos didaktikai célja volt. Bár a grafikonról leolvasott tulajdonságokat eddig is igyekeztünk igazolni a definíáló kifejezés alapján, mégis első osztályban a grafikon vizsgálata volt előtérben. Ezek a függvények viszont jól mutatják a grafikon szerepének korlátait. Másrészt ezek a függvények jól tágitják a tanulók függvény szemléletét, segíthetnek a különböző konstrukciós feladatokban is. (Lásd [7]!).

Az összefoglalás előtt még az „Algebra” témakörből előrehoztunk egy „Logikai függvények; egyenletek, egyenlőségek grafikus megoldása” címen összefogható anyagrészt, így a függvényábrázolás időigényes gyakorlását összekötöttük más problémák megoldásával.

Összefoglalásként a megismert tulajdonságok szerint rendszereztük a tanult függvényeket. Néhány tulajdonság kölcsönös viszonyát vizsgáltuk (pl.: szigorúan monoton — kölcsönösen egyértelmű). Több tulajdonsággal egyszerre rendelkező függvényeket vizsgáltunk, ha az ismertek között nem találtunk megfelelőt, akkor próbáltunk konstruálni, vagy igazolni, hogy ilyen nem létezik (pl.: $\mathbf{R}$ -en értelmezett, mindenütt negatív értékű páros, illetve páratlan).

Témazáró dolgozatot a legutóbbi osztályomban a következő feladatsorból írtam. 50 perc tiszta munkaidő állt a tanulók rendelkezésére. Zárójelben a 29 fős, tagozatú nem speciális gimnáziumi osztályban elért eredmények.

1. Az $f: x \mapsto ax+b$ függvényben határozzuk meg a és b értékét,
 - a) ha f grafikonja illeszkedik a $(0; 2)$ és $(1; -1)$ pontokra; (90%)
 - b) ha f olyan egyenes arányosság, amelynek egy összetartozó értékpárja $3 \mapsto 0,3$; (69%)
 - c) ha f értékkészletébe 3 beletartozik, de 4 nem. (Indoklás!) (41%)

2. Ábrázoljuk a következő függvényeket, és határozzuk meg értékkészletüket!

$$a) \quad x \mapsto -(x+2)^2 + 3; \quad (72\%) \qquad b) \quad x \mapsto |x+3| - x. \quad (65\%)$$

3. Oldjuk meg grafikusan:

$$2x-5 = \frac{1}{x-2}; \quad (76\%) \qquad 2x-5 \equiv \frac{1}{x-2}. \quad (38\%)$$

4. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét:

$$a) \quad x \mapsto \frac{x+2}{x-3}; \qquad b) \quad x \mapsto \{x\} + 1; \qquad c) \quad x \mapsto \{x+1\}.$$

(53%) \qquad (53%) \qquad (45%)

5. Adjunk meg olyan, $\mathbf{R}$ -en értelmezett, mindenütt negatív értékű függvényt, amely

$$a) \text{ páros (62\%);} \qquad b) \text{ páratlan (38\%).}$$

(Ahol szükséges, ott indokoljuk is meg a válaszokat!)

Irodalom

- [1] BEKE MANÓ—MIKOLA SÁNDOR: *A középiskolai matematikatanítás reformja*. Franklin Társulat, Budapest, 1909.
- [2] HÓDI ENDRE: *Az új matematika tankönyvek bemutatása elé*. Pedagógiai Szemle, 1982. 4. sz.
- [3] CSER ANDOR—IMRECZE ZOLTÁNNÉ—PÁLFY SÁNDOR: *Matematika. Ideiglenes tankönyv az általános iskola 8. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [4] IMRECZE ZOLTÁNNÉ—KOVÁCS CSONGORNÉ—SZEREDI ÉVA—SZ. FÖLDVÁRI VERA: *Matematika az ált. iskola 8. osztálya számára (új tantervhez)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [5] VARGA TAMÁS: *A függvényfogalom előkészítése I.—II.* A Matematika Tanítása, 1983. 3.—4. sz.
- [6] KATZ SÁNDOR: *A bizonyítási készség fejlesztése függvénytani feladatok segítségével*. A Matematika Tanítása, 1980. 5. sz.
- [7] KATZ SÁNDOR: *Különleges függvények szerepe a középiskolai matematika tanításában*. A Matematika Tanítása, 1981. 1. sz.
- [8] P. R. HALMOS: *Elemi halmazelmélet*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

A tér tudománya

A tér struktúrájának euklideszi formalizálása a hosszúság, a szög és a terület mértékének fogalmára épül. A geometriai tények klasszikus tárgyalási módját jellemzi, hogy a *metrika* közvetítésével jut el az olyan tételekhez is, amelyek a metrikától függetlenül is elérhetők. A tudománynak e szűk értelmezésére utal régi neve: a *geometria*.

Az idők folyamán a geometria sokat fejlődött, tárgya és módszerei bővültek. Ma már nemcsak a fizikai tér, hanem más lehetséges struktúrák elméletét is felöleli.

BOLYAI JÁNOS a geometria helyett inkább a tér tudománya (Raumlehre) elnevezést használta. Mintha csak érezte volna, hogy ez az elnevezés szerencsésebben utal a gazdagabbá váló tudomány tárgyára.

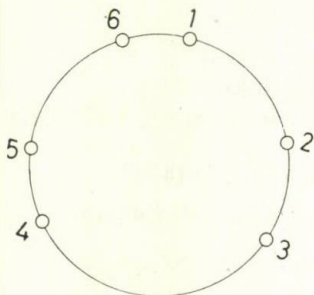
A jelen közleményben olyan téma kerül szőnyegre, amely az uralkodóan metrikus felfogású geometria-tanítás miatt észrevétlenül marad.

Ismeretes, hogy az el nem fajult kúpszeletre nézve teljesül a PASCAL-tétel: *Egy kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalai egy egyenesen metszik egymást.*

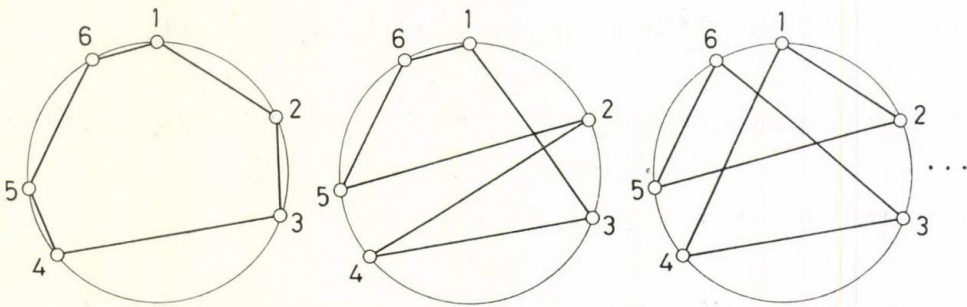
Sok tanulóval, akik már tanulták, s úgymond értették is a PASCAL-tételt, végeztem a következő kísérletet.

ÉN: Hány olyan beírt hatszög van, amelynek az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal jelölt pontok a csúcspontjai? (1. ábra.)

Némi fejtörés után fokozatosan bontakozott ki a tanuló felelete (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

TANULÓ: Sokféle sorrendben tudom úgy összekötni, hogy visszaérjek a kezdő-pontba. Egy ilyen poligont a csúcsokat jelző számok egy-egy permutációjával lehet megnevezni. Az ábrának az

1.2.3.4.5.6., 1.3.4.2.5.6., 1.2.5.6.3.4., ...

permutációk felelnek meg. Minthogy 6 elemnek 720 permutációja van, a hat csúcs 720-féle hatszöget feszít ki.

ÉN: Más permutáció okvetlenül más poligont fejez ki?

Most hosszabb fejtörés következett, s azután javította a tanuló az elhamarkodott választ.

TANULÓ: Bármelyik permutációnak megfelelő hatszöget még további 11 más permutáció is kifejez.

Így például az 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345, 654321, 543216, 432165, 321654, 216543, 165432 permutációk mindegyike ugyanazt a hatszöget fejezi ki. Ennélfogva a szóban forgó 6 pont $720:12=60$ -féle hatszöget feszít ki.

ÉN: Konvex hatszög esetén a szemlélet szerint nyilvánvaló, hogy mit értünk szemközti oldalakon. De például az 125634 hatszög esetében melyek a szemközti oldalak alkotta párok?

TANULÓ: Ez még magyarázatra vár.

ÉN: Az $i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4 \cdot i_5 \cdot i_6$ sorrendnek megfelelő hatszög szemközti oldalegyenesei

$$(i_1 \cdot i_2) \text{ és } (i_4 \cdot i_5), (i_2 \cdot i_3) \text{ és } (i_5 \cdot i_6), (i_3 \cdot i_4) \text{ és } (i_6 \cdot i_1).$$

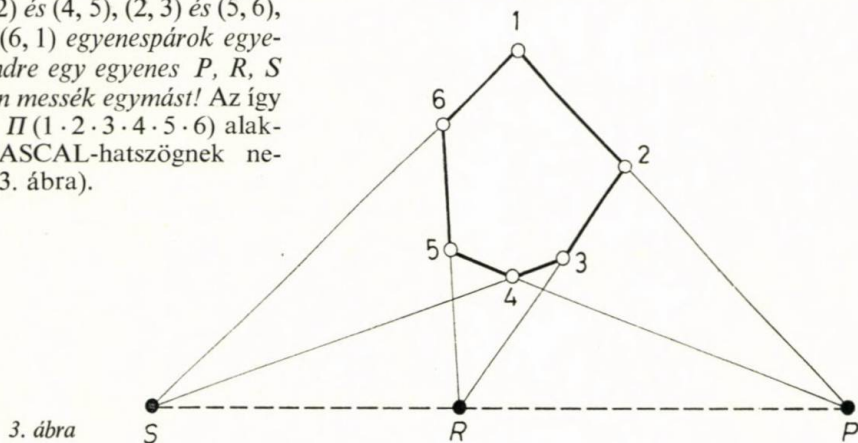
Ez után az előkészítés után tudatosodott a tanulóban a PASCAL-tételnek az az értelme, hogy a kúpszelet 6 pontjával meghatározott 60 beírt hatszög mindegyikére igaz a tétel, vagyis a hat pont hatvan olyan egyenest indukál, amelyen egy-egy hatszög szemközti oldalai metszik egymást. Sőt az is könnyen belátható, hogy ha hat pont egyik permutációja szerinti hatszög PASCAL-féle — vagyis a szemközti oldalegyenesek egy egyenes három pontjában metszik egymást —, akkor a hat pont bármely permutációja ilyen tulajdonságú hatszöget határoz meg.

E legutolsó tételhez minden hagyományos rendben felépített tankönyv metrikus elemek közvetítette gondolatmenet útján jut el.*

Fel se vetődik az a probléma, hogy levezethető-e ez a tétel metrikus elemek feltételezése nélkül.

Ezt a problémát kívánja tisztázni a jelen közlemény. (A matematikatanárok számára didaktikai célkitűzésű dolgozat kíván lenni.)

1. — Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat egy sík pontjainak megnevezésére fogjuk használni, továbbá a $\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$ jelölés értelme legyen a következő: a páronként különböző pontok közül kettőnél több ne legyen egy egyenesen, és a pontokat összekötő (1, 2) és (4, 5), (2, 3) és (5, 6), (3, 4) és (6, 1) egyenespárok egyenesei rendre egy egyenes P , R , S pontjában messék egymást! Az így definiált $\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$ alakzatot PASCAL-hatszögnek nevezzük (3. ábra).



Ha az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ sorrend egy tetszőleges permutációja az $i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4 \cdot i_5 \cdot i_6$, akkor kérdezzük, hogy mit mondhatunk az

$$(i_1, i_2) \cap (i_4, i_5), (i_2, i_3) \cap (i_5, i_6), (i_3, i_4) \cap (i_6, i_1)$$

* HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába* (Tankönyvkiadó) című könyvének gondos elemzése is meggyőzheti az olvasót állításom helyességéről.

metéspontokról. Be fogjuk bizonyítani, hogy a szóban forgó permutációval meghatározott hatszög is PASCAL-féle. Előbb azonban néhány segédteét kell ismertetnünk. Továbbá a síkot meghatározó axiómarendszert is meg kell adni.

2. — A síkot négy axióma határozza meg:

P1. — Két (különböző) pont egy és csak egy egyenesnek pontja.

P2. — Két (különböző) egyenesnek van közös pontja.

P3. — Van olyan négy pont, amelyek közül kettőnél több nincs egy egyenesen.

P4. — Teljesül a PAPPOSZ—PASCAL-tétel.

A P_4 axiómát P — P -tételnek is mondjuk. Ez a következőt állítja. Ha egy O ponton átmenő a és b egyenesek különbözők, és a egyenesen vannak az O -tól különböző 1, 3, 5 pontok, a b egyenesen az O -tól különböző 2, 4, 6 pontok, akkor az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 5 \cdot 6$ hatszögre teljesül, hogy az

$$(1 \cdot 2) \cap (4 \cdot 5), (2 \cdot 3) \cap (5 \cdot 6), (3 \cdot 4) \cap (6 \cdot 1)$$

Ha például a $\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$ -ból következtetünk az $(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6)$ hatszögre, az eddigi segéd tételek ismételt alkalmazása szerint

$$\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \Rightarrow \Pi(5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \Rightarrow \Pi(5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3) \Rightarrow \Pi(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6).$$

TÉTEL — Ha $i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot i_4 \cdot i_5 \cdot i_6$ az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ sorrend egy permutációja, akkor

$$\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \Rightarrow \Pi(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6).$$

E tétel a 3. segéd tétel többszöri alkalmazásával könnyen igazolható.

Például a $\Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \Rightarrow \Pi(3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5)$ igazolása:

$$\begin{aligned} \Pi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) &\Rightarrow \Pi(1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \Rightarrow \Pi(3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Pi(3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5) \Rightarrow \Pi(3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5) \Rightarrow \Pi(3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5). \end{aligned}$$

SZERÉNYI TIBOR

főiskolai docens

Szeged

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1983. évi matematikai tanulmányi versenyéről II.

5. feladat

Az f függvényt elemi törtek összegére bontjuk, majd tagonként differenciálunk 1983-szor.

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{3}{2} (x-3)^{-1} + \frac{1}{2} (x+3)^{-1};$$

$$f^{(1983)}(x) = -\frac{3}{2} \cdot 1983! (x-3)^{-1984} - \frac{1}{2} \cdot 1983! (x+3)^{-1984}.$$

Ebből az $x=0$ helyettesítéssel $f^{(1983)}(0)$ -ra adódik:

$$f^{(1983)}(0) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1983!}{3^{1983}}.$$

6. feladat

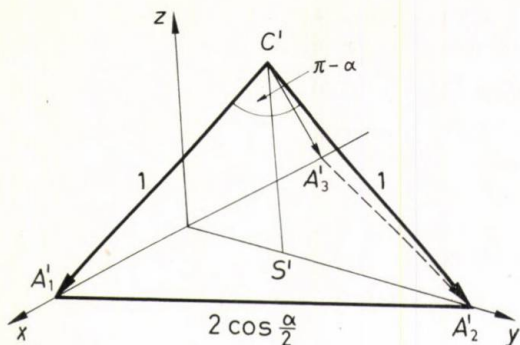
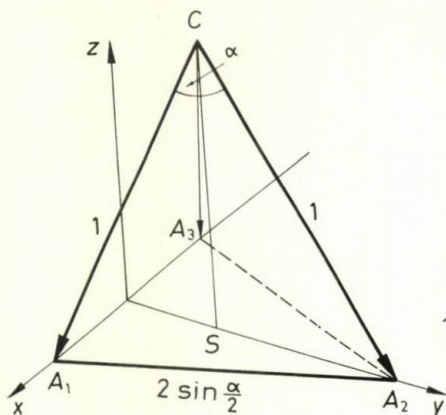
A kétféle paralelepipedon egyikét az a változat jelenti, amikor van olyan C csúc, amelynél találkozó három lap a hegyesszögeivel; a másikat, amikor van olyan C' csúc, amelynél találkozó három lap a tompaszögeivel illeszkedik. (Az utóbbi változat lehetőségét biztosítja az a feltevés, hogy a rombuszok hegyesszöge 60° -nál nagyobb.)

A térfogatok kiszámításához helyezzük el a paralelepipedonokat a koordináta-rendszerben úgy, hogy a C , illetve a C' csúcsokból kiinduló élek A_1, A_2, A_3 , illetve A'_1, A'_2, A'_3 végpontjai az xy síkban legyenek, és pedig A_1, A_3 , illetve A'_1, A'_3 az x tengelyen, A_2 , illetve A'_2 az y tengelyen, C , illetve C' a $z > 0$ féltérben legyen! A rombuszok oldalának hosszát vegyük egységnyinek, és a hegyesszögük mértékszámát legyen α .

A két paralelepipedon térfogata ekkor a $\vec{CA_1}, \vec{CA_2}, \vec{CA_3}$, illetve $\vec{C'A'_1}, \vec{C'A'_2}, \vec{C'A'_3}$ vektorok térfogatszorzata (vegyes szorzata).

A feltételekből következik, hogy a C -ből, illetve C' -ből az xy síkra bocsátott merőleges a síkot az $A_1 A_2 A_3$, illetve $A'_1 A'_2 A'_3$ háromszög

$$S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}; 0\right), \text{ illetve } S'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\alpha}{2}; 0\right)$$



súlypontjában metszi, következőleg

$$CS = \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad C'S' = \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ezért az $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3, C, C'$ pontok koordinátái:

$$A_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0 \right), \quad A_2 \left(0; \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}; 0 \right), \quad A_3 \left(-\sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0 \right),$$

$$A'_1 \left(\cos \frac{\alpha}{2}; 0; 0 \right), \quad A'_2 \left(0; \sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}; 0 \right), \quad A'_3 \left(-\cos \frac{\alpha}{2}; 0; 0 \right),$$

$$C \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}; \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \quad C' \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\alpha}{2}; \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

amiből a vektorokra

$$\overrightarrow{CA_1} = \left(\sin \frac{\alpha}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

$$\overrightarrow{CA_2} = \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

$$\overrightarrow{CA_3} = \left(-\sin \frac{\alpha}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

illetve

$$\overrightarrow{C'A'_1} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

$$\overrightarrow{C'A'_2} = \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right),$$

$$\overrightarrow{C'A'_3} = \left(-\cos \frac{\alpha}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\alpha}{2}; -\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

adódik. Ezek birtokában a paralelepipedonok V , illetve V' térfogata:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

illetve

$$V' = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

(A negatív előjeleknek az a magyarázata, hogy a tekintett élvektorok balra forgó (balsodrású) rendszert alkotnak.)

7. feladat

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a $\{v_k\}$ sorozat növekvő! Ugyanis

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{2}{k \cdot (k-1)} \cdot \left[\frac{k}{k-2} \cdot u_{k-1} \right] = \frac{2}{k \cdot (k-1)} \cdot \left[\frac{k}{k-2} \cdot u_{k-1} \right] \cdot \frac{k+1}{k+1} = \\ &= \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot \left[\frac{k}{k-2} \cdot u_{k-1} \right] \cdot \frac{k+1}{k-1} \leq \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot \left[\left[\frac{k}{k-2} \cdot u_{k-1} \right] \cdot \frac{k+1}{k-1} \right] = \\ &= \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot \left[u_k \cdot \frac{k+1}{k-1} \right] = \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot u_{k+1} = v_{k+1}. \end{aligned}$$

Ezután a $\{v_k\}$ sorozat konvergenciájának bizonyításához elegendő megmutatni, hogy van konvergens részsorozata. Először ehhez bizonyítsuk be, hogy

$$u_{3k} = \frac{3k \cdot (k-1)}{2}.$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A $k=2$ esetre igaz az állítás, mert

$$(4) \quad u_6 = \left[\frac{6}{4} \cdot u_5 \right] = \left[\frac{3}{2} \cdot \left[\frac{5}{3} \cdot u_4 \right] \right] = 3.$$

Tegyük fel, hogy $k=n (\geq 2)$ esetén (4) igaz, és bizonyítsuk be, hogy akkor $(n+1)$ -re is igaz!

Az u_k értelmezése szerint

$$\begin{aligned} u_{3(n+1)} &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot u_{3n+2} \right] = \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot u_{3n+1} \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n+1}{3n-1} \cdot u_{3n} \right] \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n+1}{3n-1} \cdot \frac{3n(n-1)}{2} \right] \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n-1+2}{3n-1} \cdot \frac{3n(n-1)}{2} \right] \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n(n-1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{3n-1} \right] \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n(n-1)}{2} + \frac{(3n-1+1)(n-1)}{3n-1} \right] \right] \right] = \\ &= \left[\frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left[\frac{3n+2}{3n} \cdot \left[\frac{3n(n-1)}{2} + n-1 + \frac{n-1}{3n-1} \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

De $\frac{3n(n-1)}{2}$ és $n-1$ egész, $\frac{n-1}{3n-1} < 1$, ezért

$$\left\lfloor \frac{3n(n-1)}{2} + n - 1 + \frac{n-1}{3n-1} \right\rfloor = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2 - n}{2},$$

és

$$\begin{aligned} u_{3(n+1)} &= \left\lfloor \frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left\lfloor \frac{3n+2}{3n} \cdot \frac{n(3n-1)}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left\lfloor \frac{9n^2 + 3n - 2}{6} \right\rfloor \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{3n+3}{3n+1} \cdot \left\lfloor \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{1}{3} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n+3}{3n+1} \cdot \frac{n(3n+1)}{2} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{3n(n+1)}{2} \right\rfloor = \frac{3n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

Tekintsük most a $\{v_k\}$ sorozat $\{v_{3k}\}$ részsorozatát:

$$v_{3k} = \left(\frac{3k}{2}\right)^{-1} \cdot u_{3k} = \frac{2}{3k(3k-1)} \cdot \frac{3k(k-1)}{2} = \frac{k-1}{3k-1} \rightarrow \frac{1}{3},$$

ha $k \rightarrow \infty$, amiből

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \frac{1}{3}$$

is következik.

GÁRDOS ÉVA

KLTE, Matematikai Intézet, Debrecen

LOGO programozási nyelv mint a számítástechnika oktatásának egyik új eszköze

E tanulmány tárgya a kifejezetten kisgyermekes számítástechnika- és matematikaoktatására kifejlesztett LOGO nyelv

rövid bemutatása. Megpróbálunk rávilágítani e nyelv előnyeire az igen elterjedt BASIC nyelvvel szemben.

1. Bevezetés

12 évvel ezelőtt kezdődött a MIT-ben (Massachusetts Institute of Technology) Seymour Papert csoportjának vizsgálata a számítógépes oktatás területén. A kutatásba több más egyetem munkatársai is bekapcsolódtak. A vizsgálatok során felméréseket végeztek óvodákban és különböző iskolatípusokban egy új, általuk létrehozott, LOGO-nak nevezett nyelvvel. A LOGO közel áll az emberi gondolkodási folyamathoz, ezért speciális lehetőséget biztosít az ember és a számítógép közötti kommunikáció, a számító-

géppel történő tanulás, játék kutatásához.

A LOGO sikere abban rejlik, hogy kísérletet tesz a programozás, a matematika és az esztétika szintézisére. Elszakad a szokásos programozási nehézségektől, mint például a tömbhasználat vagy egy változó egész vagy valós típusának kijelölése, és olyan fogalmakat tesz természetessé, mint a hierarchikus struktúra, rekurzió. Tervezőinek jelszava: a LOGO a tanulás nyelve. Ez a gyakorlatban a lehető legegyszerűbb programozási nyelv

megteremtését jelenti, amely a gondolkodási folyamat lépéseit követi.

A LOGO interaktív nyelv, hasonlóan a BASIC-hez az interaktivitás legfontosabb szerepe a programfejlesztésben van. A LOGO a LISP egy dialektusa, amely különösen alkalmas a mesterséges intelligencia kutatására. A számítógépek oktatásban történő felhasználása nem azt jelenti, hogy minden tanulónak annyi mindent kell tudnia a számítógépről, mint egy programozónak; a cél az, hogy megismerjék és elsajátítsák a tanulás folyamatát. Felmerül a kérdés, hogy mi az előnye a LOGO-nak a többi programnyelvvvel szemben? Az első, hogy a LOGO a programozás sok alapvető gondolatát képes kifejezni. Ha valaki megtanulja ezt a nyelvet, nagyon világos elképzelései lesznek a változókról, eljárásokról és más programozási konstrukciókról. Ezért a LOGO igen jó alapot szolgáltat a FORTRAN vagy a PL/I megtanulásához, ezek elsajátítása könnyebb, mintha a bonyolultabb programnyelv megismerésével foglalkozna először a tanuló. Ez a nyelv önállóságra szoktat, de természetesen nem helyettesíti a többi programnyelvet. A következőkben néhány szempont alapján összehasonlítjuk a LOGO-t az iskolaszámítógépeken és általában a személyi számítógépeken elterjedt BASIC nyelvvel. A BASIC-nek az a híre, hogy könnyű megtanulni, kevés alapszava van, de ezeket nem lehet kiterjeszteni. Valóban könnyű elsajátítani, de nehéz használni. A programozó nem hozhat létre eljárásokat, nem nevezheti el őket és nem építhet belőlük más eljárásokat. A BASIC nem teszi lehetővé azt a fontos problémamegoldási stratégiát, hogy a feladatok egyre kisebb és kisebb részekre legyenek bonthatók.

A LOGO-t kifejezetten gyermekek számára fejlesztették ki. Papert és társai a számítógépet olyan környezetnek tekintették, amelyben a gyerekek cselekvés és gondolkodás által tanulhatnak. A komputer eszközként szolgál érdekes matematikai objektumok kreálásához,

tehát közelít az emberi intuíciónak a képességhez. Ezeknek az objektumoknak a komputer által irányított geometriai megvalósítása a teknőc-geometria. Az embereket a teknősbéka viselkedésének megfigyelése vezette az intuitív geometriai ismeretek megszerzéséhez. A számítógép programozása nem jelent se többet, se kevesebbet, mint kommunikálni egy olyan nyelvvel a géppel, amelyet a felhasználó és a gép is „ért”, és nyelveket a gyerekek tanulnak a legkönnyebben. Minden normális gyerek megtanul beszélni. Akkor miért ne tanulhatna meg „beszélni” a számítógéppel? Azonban ez így túl egyszerű. Tudjuk, hogy míg a kisgyerek látványos könnyedséggel tanulja meg a saját nyelvét, addig igen nagy nehézségek árán sajátítja el az idegen nyelveket az iskolában és nem túl eredményesen tanulja meg írott formában saját nyelvét. Mindezek a problémák még súlyosbodnak azzal a nehézséggel, amellyel a legtöbb ember szembekerül a matematika tanulásakor. Két lehetséges utat képzelünk el ezek áthidalására:

- a) a számítógépeket lehetséges úgy megtervezni, hogy a velük való kommunikáció olyan természetes folyamatá váljon, mint például angolul tanulni Angliában és nem az osztályteremben ülve tanulni az illető idegen nyelvet;
- b) a géppel való kommunikáció megtanulása más módon is lehetséges. A számítógép egy matematikai és egy alfabetikus nyelvet ismer. A gyermeket megtanítjuk a számítógép nyelvének használatára, ami megteremti a kommunikáció alapját. Miután ez a kapcsolat létrejön, a gyerek úgy tanulja a matematikát, mint az élő nyelvet „Matematikaországban”.

A legtöbb jelenlegi oktatási situációban, ahol a gyerekek kontaktusba kerülnek a számítógéppel, a számítógép gondoskodik alkalmas nehézségű feladatokról, a visszacsatolásról és az információk közléséről. A LOGO környezetben megfordul a helyzet: a gyerek irányít, programozza a gépet. Annak megtanulása

közben, hogy a számítógép hogyan gondolkodik, a gyerek öntudatlanul nekilát saját gondolkodási rendszerének felderítéséhez.

Néhány sorban bemutatjuk a LOGO nyelv egyes részleteit, illetve azok magyar változatát. Természetesen e nyelv hazai

oktatásban történő elterjesztésének csak akkor van értelme és jövője, ha az eddigi, angol nyelvre épült utasításokat, parancsokat stb., azaz a LOGO minden elemét magyarul adjuk meg, hogy egy írni, olvasni tudó gyerek képes legyen a nyelv elsajátítására.

2. LOGO műveletek

A LOGO nyelvben az objektumoknak három kezelési módja van, amelyeket *betűknek*, *szavaknak* és *mondatoknak* neveznek. Egy LOGO *betű* lehet egy alfabetikus karakter, egy numerikus karakter vagy egy különleges karakter (pl. *, % stb.).

Egy LOGO *szó* betűk olyan sorozata, amelyek nincsenek szóközzel elválasztva. Szó például egy értelmes szó, mint a KUTYA, vagy egy szám is: 6242. Egy LOGO *mondat* szavak olyan soro-

zata, amelyek szóközzel vannak elválasztva.

Bizonyos műveletek végrehajthatók a LOGO betűkön, szavakon és mondatokon. Ezek a következők: egyesítés, nyomtatás, összeszámlálás, kivonás és elnevezés.

Például a kivonás művelete:

ELSŐ „ALMA”=„A”
NEMELSŐ „ALMA”=„LMA”
UTOLSÓ „ALMA”=„A”
NEMUTOLSÓ „ALMA”=„ALM”

Egyesítés művelete:

SZÓ „MAGYAR” ÉS „ORSZÁG”=„MAGYARORSZÁG”

MONDAT „MATEMATIKA” ÉS „FIZIKA”=„MATEMATIKA FIZIKA”

(idézőjelet használunk azoknak az objektumoknak az elhatárolására, amelyeken a műveleteket végrehajtjuk, valamint az eredmény jelölésére).

3. LOGO eljárások

A LOGO-ban a problémák kis részekre bontottak, és minden ilyen kis egységre önálló eljárást írunk. Ebben a tekintetben a LOGO olyan, mint a legmodernebb nyelvek. A PASCAL, APL, LISP, C és a FORTRAN megengedi a program felosztását független eljárásokra. A népszerű, általános célú nyelvek közül csak a BASIC-ből hiányzik ez a képesség.

Egy egyszerű eljárás például a következő, amely egy számot kettőz meg. Kiválasztjuk az eljárás nevét: KETTŐZ. A következő lépés, hogy megadjuk a formális paraméterek neveit — ebben az esetben egyetlen bemenete van az eljárásnak: SZÁM.

Így az eljárás címe: KETTŐZÉS (SZÁM). A slash a SZÁM előtt és után a paraméter eljárás nevétől való elválasztására használjuk.

Amikor kiadjuk azt a parancsot, hogy IRD! KETTŐZÉS 10, akkor a képernyőn 20 fog megjelenni.

Ennek az eljárásnak egyetlen utasítása van:

KIAD ÖSSZEG (SZÁM) ÉS (SZÁM)

Két elemi utasításból tevődik össze, mégpedig a KIAD és az ÖSSZEG beépített utasításokból.

A KIAD jelentése: „a válasz a következő”. Így a KIAD ÖSSZEG (SZÁM) ÉS (SZÁM) jelentése, a választ az ÖSSZEG (SZÁM) ÉS (SZÁM)-ra. Az ÖSSZEG olyan művelet, amelynek két bemenete van (ezeknek egészeknek kell lenniük),

és ezek összege a kimenete. Így például az ÖSSZEG 3 és 8 kimenete 11. A következő LOGO utasítás hatására a képernyőn meg fog jelenni az eredmény:

IRD! ÖSSZEG 3 ÉS 8

Visszatérve az eljárás definiálására:

\$ KETTŐZÉS (SZÁM)

1 KIAD ÖSSZEG (SZÁM) ÉS (SZÁM)

VÉGE

ahol az 1 utasítássorszám és a VÉGE jelzi az eljárás definiálásának befejezését. Ha mindezek begépelése befejeződött, megjelenik a képernyőn a következő szöveg: KETTŐZÉS DEFINIÁLT

Ettől a ponttól kezdődően ez az eljárás ugyanúgy használható, mint bármely beépített része a LOGO-nak, mint például az IRD! vagy az ÖSSZEG.

Az eljárás használatára példa:

IRD! KETTŐZÉS 6

A gép válasza:

12

IRD! KETTŐZÉS KETTŐZÉS 8

32

(aláhúzással jelöltük a felhasználó által gépelt sorokat).

4. Relációk és logikai műveletek

A LOGO-ban van bizonyos számú reláció és logikai művelet.

A relációknak kétféle kimenete lehet: az IGAZ és a HAMIS. Az EGYENLŐ? — elemi LOGO prédikátum, amelynek két bemenete van, és a kimenete IGAZ, ha bemenetei ugyanazt a dolgot fejezik ki. Különben a kimenete HAMIS. Például:

IRD! EGYENLŐ? 1 ÉS 1

IGAZ

IRD! EGYENLŐ? 2 ÉS 3

HAMIS

A másik reláció a NAGYOBB?, amelynek a kimenete IGAZ, ha az első bemenete szigorúan nagyobb, mint a második bemenete, különben HAMIS.

IRD! NAGYOBB? 2 2

HAMIS

Adottak logikai műveletek is, mint például a MINDKETTŐ és az EGYIK. MINDKETTŐ kimenete IGAZ, ha mindkét bemenete IGAZ volt (konjunkció), EGYIK kimenete IGAZ, ha legalább az egyik bemenete IGAZ volt (diszjunkció). Például:

IRD! MINDKETTŐ (NAGYOBB? 5 7) ÉS (EGYENLŐ? 3 2)

HAMIS

Egy prédikátum logikai értéke megvizsgálható, és attól függően, hogy az IGAZ vagy HAMIS volt, másképpen folytatódik az eljárás.

E vizsgálat elvégzésére adott a VIZSGÁLD! nevű LOGO parancs.

VIZSGÁLD! EGYENLŐ? 1 1

HA HAMIS! IRD! „1 NEM EGYENLŐ 1-GYEL”

HA IGAZ! IRD! „IGY VAN!”

IGY VAN!

A VIZSGÁLD! parancsnak egy bemenete van, amelyről azt kell eldönteni, hogy igaz-e vagy hamis. Ennek hatására egy „igazság jelző”-t állít be. Ezt összekapcsolva a HA IGAZ! paranccsal, akkor bemenetként egy utasítássort kapunk, amely csak akkor valósul meg, ha a jelző igazat mutat. (Hasonlóan a HA HAMIS!)

Az előbbieket felhasználva új logikai műveletek is definiálhatók. Például:

§ NEM (BEMENET)

1 VIZSGÁLD! (BEMENET)

2 HA IGAZ! KIAD „HAMIS”

3 KIAD „IGAZ”

VÉGE

NEM DEFINIÁLT

IRD! NEM EGYENLŐ? 1 2

IGAZ

5. Rekurzivitás

A LOGO nyelv egyik legjelentősebb tulajdonsága a rekurzivitás. A nyelv akkor rekurzív, ha egy eljárás önmaga részeljárása lehet. Minden modern eljárás-centrikus nyelv megengedi a rekurziót. A széles körben használt nyelvek közül csak a FORTRAN és a BASIC nem engedi meg a rekurzív eljárásokat. Úgy látszik, mintha a rekurzió nem lenne túlságosan fontos. Nehéz egyszerű módon megmagyarázni jelentőségét — pedig mély matematikai fontossággal bír. Rekurzió segítségével egy bonyolult probléma leírható önmagának egyszerű változataként, lehetővé válik, hogy nagy problémák igen tömör formában legyenek kifejezve. Nézzünk egy egyszerű LOGO rekurzív eljárást a faktoriális függvény kiszámítására!

§ FAKTORIÁLIS (N)

1 VIZSGÁLD! EGYENLŐ? (N) 1

2 HA IGAZ! KIAD 1

3 KIAD SZORZÁS (N) ÉS FAKTORIÁLIS (N-1)

VÉGE

IRD! FAKTORIÁLIS 7

5040

Az itt bemutatott utasítások és parancsok töredékei a LOGO nyelvnek. Szövegkezelése is rendkívül rugalmas és szellemes.

Valószínűleg a LOGO leghíresebb aspektusa a teknőc-geometria gondolata. A komputer-grafikának ezt a megközelítését hozzávették más nyelvekhez is, például a PASCAL-hoz, de eredetileg a LOGO-ból indult ki. A Descartes-koordináták használatánál nem túl nehéz egy egyenesen álló négyzetet rajzolni egy adott pozícióba, de ha a négyzet el van billentve, akkor csúcspontjainak koordinátáit csak a trigonometria segítségével lehet meghatározni. A teknőc-geometria erőssége éppen abban

rejlík, hogy a vonalak nem a koordináta-rendszerbeli pozíciójuk szerint vannak leírva, hanem a teknőc pozíciója és iránya szerint, amely egy képzeletbeli állat és a képernyőn mozog. Ebben a rendszerben nem azt mondjuk meg, hogy honnan indul a teknőc vagy hol van a mozgásának vége, hanem hogy milyen messze megy és milyen irányban.

Például:

\$ NÉGYZET: HOSSZ

1 ISMÉTELD! 4 ELŐRE: HOSSZ JOBBRA 90

VÉGE

Kutatásaink célja a nyelv magyar adaptációja; elterjedésével újabb lehetőségeket remélünk a számítástechnika oktatásában, elsősorban az általános iskolás korosztályra gondolva.

IRODALOM

- [1] ABELSON H.: „A beginners guide to LOGO”. Byte Vol. 7, No. 8 (1982) 88—134.
- [2] FEURZEIG W. AND LUKAS G.: LOGO — A programming language for teaching mathematics”. Educational Technology March (1972) 39—46.
- [3] HARVEY B.: „Why LOGO?” Byte Vol. 7, No. 8 (1982) 163—193.
- [4] HOW J. AND O SHEA T.: „Learning Mathematics through LOGO”, ACM Science Bulletin V. 12, No. 1 January (1978) 2—11.
- [5] WATT D.: „LOGO in the schools”, Byte Vol. 7, No. 8 (1982) 116—160.
- [6] WEIR S. AND WATT D.: „LOGO A computer Environment for learning-disabled Students.” LOGO Group Artificial Intelligence Laboratory MIT. Cambridge, Massachusetts 02139. May (1980) 2—20.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II/10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat be-
küldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1083. Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\prod_{k=1}^n (x+k) = y^2 + 1$$

egyenletet, ha $n \geq 3$.

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

1084. Van-e olyan 2-nél nagyobb természetes szám, amely egyetlen pitagorászi számhármastak sem tagja?

Horváth Tibor, Dunakeszi

1085. Az ABC háromszög belsejében felvett P ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival! Igazoljuk, hogy a párhuzamosok és az oldalak által meghatározott három paralelogramma területének az összege nem nagyobb az ABC területének kétharmadánál!

Varga István, Nagyszalonta

1086. Az $ABCD$ körbe írható trapéz három oldalára teljesül: $AD=DC=CB$. A kör DD' átmérőegyenese az AB egyenest az E pontban metszi. Bizonyítsuk be, az $ADE \triangle$ egyenlő szárú!

1087. Legyen

$$S_n = 2 \sum_{k=2}^n \left(k \cdot \log_k (k+1) - \frac{1}{k} \right)$$

minden $n \geq 5$ pozitív egészre!

Igazoljuk, hogy $[\sqrt[n]{S_n}] = n+1$, ahol $[x]$, az x valós szám egész részét jelöli!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1088. Az (a_n) sorozatot definiáljuk a következő módon:

$$a_1 = 5$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páros,} \\ \frac{a_n + 1985}{2}, & \text{ha } a_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat periodikus, és határozzuk meg periódusát is!

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Feladatmegoldások (1059—1064.)

1059. Az $ABCD$ négyszög AB , illetve CD oldalainak felezőpontja rendre P , illetve Q , az AC , illetve BD átlójának felezőpontja pedig rendre R , illetve S . Bizonyítsuk be, ha $PQ \perp RS$, akkor $AD=BC$.

I. megoldás: Az ABD , illetve az ACD háromszögek PS , illetve QR középvonala az AD oldallal párhuzamos és fele akkora (1. ábra). Ezért, ha R nem azonos az S ponttal, a $PRQS$ négyszög két szemköztes oldala párhuzamos és egyenlő, tehát paralelogramma. Ennek PQ , RS átlói — a fel-tétel miatt — merőlegesen felezik egymást, tehát a $PRQS$ rombusz. Ebből pedig $AD=BC$ követke-zik, mert a BCD háromszög QS középvonalára

$$QS = \frac{1}{2} \cdot BC \text{ teljesül, de } QS = PS = \frac{1}{2} \cdot AD.$$

Ha az R és S pontok azonosak, akkor is telje-sül az állítás, hiszen ekkor az $ABCD$ négyszög átlói felezve metszik egymást, tehát a négyszög paralelogramma, s ezért

$$AD = BC \text{ és } AB = CD$$

egyaránt teljesül.

Udvari Tibor, Baja

II. megoldás: Vezessük be az $\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ jelöléseket. Ezekkel

$$(*) \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

ugyanis egyrészt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \mathbf{a} + \overrightarrow{DQ}, \text{ és } \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RC} + (-\mathbf{b}) + \overrightarrow{BS},$$

másrészt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \mathbf{b} + \overrightarrow{CQ} \text{ és } \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \mathbf{a} + \overrightarrow{DS},$$

de

$$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{CQ}, \quad \overrightarrow{RC} = -\overrightarrow{RA}, \quad \overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{DS}$$

miatt, ha a $\overrightarrow{PQ}$ -ra, illetve $\overrightarrow{RS}$ -re kapottakat összegezzük, eredőként a (*) alattiak adódnak. Az $\frac{\mathbf{a}}{2}$ és $\frac{\mathbf{b}}{2}$ (közös kezdőpontú) vektorok által kifeszített — esetleg elfajuló — paralelogramma átlóvektorai éppen az $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, illetve $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Ha ezek merőlegesek, akkor az $\frac{\mathbf{a}}{2}, \frac{\mathbf{b}}{2}$ által kifeszített paralelogramma rombusz, tehát $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, amiből $AD = BC$.

Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely

III. megoldás: Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az y -tengely az AB oldal felezőmerőlegese legyen, a hosszegységet pedig az $\frac{1}{2}AB$ adja! E választás mellett az

pontok koordinátaival $A(-1; 0), B(1; 0), C(c_1; c_2), D(d_1; d_2)$

$$P(0; 0), Q\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right), R\left(\frac{c_1 - 1}{2}; \frac{c_2}{2}\right), S\left(\frac{d_1 + 1}{2}; \frac{d_2}{2}\right).$$

Ha $RS \perp PQ$ akkor irányítányezőik szorzata -1 , azaz

$$\frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1 + 2} \cdot \frac{c_2 + d_2}{c_1 + d_1} = -1,$$

amiből rendezés után, mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva

$$d_1^2 + 2d_1 + 1 + d_2^2 = c_1^2 - 2c_1 + 1 + c_2^2$$

adódik.

Ebből

$$(d_1 + 1)^2 + d_2^2 = (c_1 - 1)^2 + c_2^2$$

miatt

$$AD^2 = BC^2,$$

azaz

$$AD = BC$$

következik.

A bizonyítás során felhasználtuk, hogy

$$c_1 \neq d_1 + 2 \quad \text{és} \quad c_1 \neq -d_1.$$

Ha $c_1 = d_1 + 2$, akkor $R\left(\frac{d_1 + 1}{2}; \frac{c_2}{2}\right)$. Így $c_2 = d_2$ esetben R és S azonosak, de

$$AD^2 = (d_1 + 1)^2 + d_2^2 = BC^2$$

most is teljesül. A $c_2 \neq d_2$ mellett RS merőleges az x -tengelyre, tehát a feltétel miatt PQ párhuzamos e tengellyel, s így $c_2 = -d_2$, azaz $AD = BC$ most is teljesül.

Ha $c_1 = -d_1$, úgy PQ merőleges az x -tengelyre, tehát RS párhuzamos ezzel, és ezért $d_2 = c_2$. De ebben az esetben is $AD^2 = BC^2$, tehát $AD = BC$.

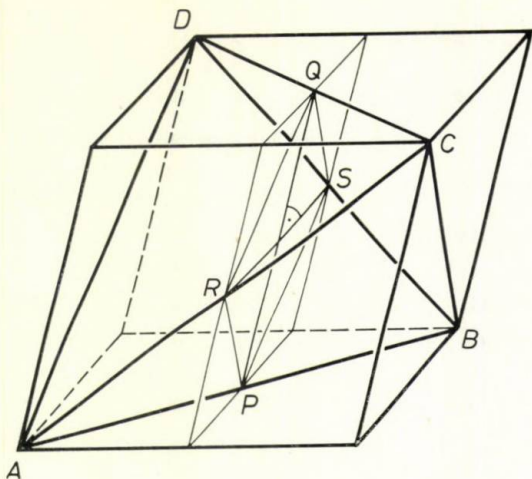
Hajna János, Pécs

Megjegyzések: 1. Valamennyi megoldásból kitűnik, hogy az állítás bármely (konvex, konkáv) négyszögre igaz. Az első két megoldásból még az is látható, hogy nem egysíkú $ABCD$ (torz) négyszögre is teljesül az $AD = BC$, továbbá a PQ egyenesnek az AD, BC egyenesekkel való hajlásszöge egyenlő. Ugyancsak bizonyításaink támasztják alá a feladatbeli állítás megfordíthatóságát.

2. Az előbbi megoldásokban az $ABCD$ négyszögnek szinte semmilyen tulajdonságát nem használtuk fel. Például azt sem, hogy síkbeli, de azt sem, hogy esetleg elfajuló (háromszög vagy szakasz).

Bebizonyítható az állítás egyszerű elemi geometriai megfontolásokkal is, ha a négy pont nem egysíkú — mint azt előző megjegyzésünkben láttuk.

Ismert tény, hogy minden paralelepipedonból tetraéder alakítható ki négy „testszögletének” lemetésével, illetve megfordítva, hogy minden tetraéder kiegészíthető paralelepipedonná. Azt



2. ábra

Az olyan paralelogramma pedig, melynek középvonalai merőlegesek egymásra — és felezik is egymást — téglalap. Téglalap tehát a tetraéder köré írt paralelepipedon AD és BC éleket tartalmazó lapja. Az AD és BC szakaszok ezen egybevágó téglalapok átlói — melyek egyenlők.

A megoldók száma: 42.

1060. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós gyökeit:

$$a^{2x}c^z + b^y = 2a^xc^z,$$

$$b^{2y}a^x + c^z = 2b^ya^x,$$

$$c^{2z}b^y + a^x = 2c^zb^y,$$

ahol a, b, c egytől különböző pozitív számok!

Varga István, Nagyszalonía

I. megoldás: Az egyenleteket összeadva, rendezve és csoportosítva, a következőhöz jutunk:

$$c^z(a^x - 1)^2 + b^y(c^z - 1)^2 + a^x(b^y - 1)^2 = 0.$$

A bal oldalon — a feltételek miatt — három nem negatív szám összege áll, amely akkor és csak akkor 0, ha valamennyi tag 0. Mivel a tagok első tényezői pozitív valós számok, ezért

$$a^x = b^y = c^z = 1$$

kell legyen. Figyelembe véve, hogy a, b, c egyike sem 1, kapjuk

$$x = y = z = 0.$$

Ezek valóban kielégítik egyenletrendszerünket, amelynek tehát egyetlen megoldása van, a $(0, 0, 0)$ számhármass.

Bíró Béla, Barót; Hornyák Pál, Érsekújvár;
Polcz Katalin, Pécs

II. megoldás: Legyen $p = a^x, q = b^y$ és $r = c^z$! Ezekkel egyenletrendszerünk:

$$p^2r + q = 2pr, \quad q^2p + r = 2qp, \quad r^2q + p = 2rq.$$

Ezekből rendezés után, ekvivalens átalakításokkal:

$$0 < \frac{q}{r} = p(2-p), \quad 0 < \frac{r}{p} = q(2-q), \quad 0 < \frac{p}{q} = r(2-r).$$

$$1 = \frac{q}{r} \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{p}{q} = p(2-p) \cdot q(2-q) \cdot r(2-r).$$

Tegyük fel, hogy a $p(2-p)$, $q(2-q)$, $r(2-r)$ nem negatív tényezők között van 1-nél nagyobb. Legyen ez a $p(2-p)$, azaz

$$p(2-p) = 1 + E, \text{ ahol } E > 0.$$

Ebből

$$0 = p^2 - 2p + 1 + E = (p-1)^2 + E > 0$$

adódik, ami lehetetlen. Következésképpen mindhárom tényező 1, és így

$$p = q = r = 1.$$

Ezekkel pedig az

$$x = y = z = 0$$

megoldás adódik.

Bokor József, Szeged

Megjegyzés: Analóg módon oldhatjuk meg az alábbi $n (\geq 3)$ ismeretlenes egyenletrendszert:

$$a_2^{2x_2} \cdot a_1^{x_1} + a_n^{x_n} = 2a_2^{x_2} \cdot a_1^{x_1},$$

$$a_1^{2x_1} \cdot a_n^{x_n} + a_{n-1}^{x_{n-1}} = 2a_1^{x_1} \cdot a_n^{x_n},$$

$$a_n^{2x_n} \cdot a_{n-1}^{x_{n-1}} + a_{n-2}^{x_{n-2}} = 2a_n^{x_n} \cdot a_{n-1}^{x_{n-1}},$$

$\vdots$

$$a_3^{2x_3} \cdot a_2^{x_2} + a_1^{x_1} = 2a_3^{x_3} \cdot a_2^{x_2},$$

ahol $a_i > 0$, $a_i \neq 1$ minden $1 \leq i \leq n$ -re.

Ennek is egyetlen megoldása van: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

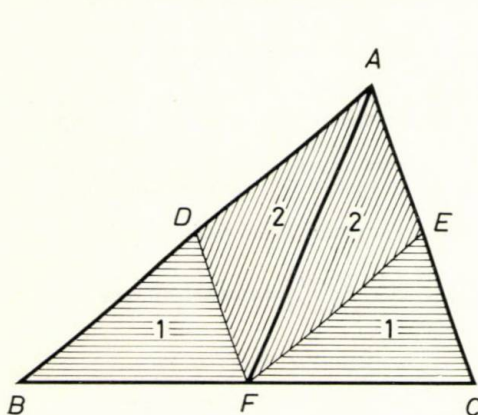
Cseh László, Kolozsvár

A megoldók száma: 33.

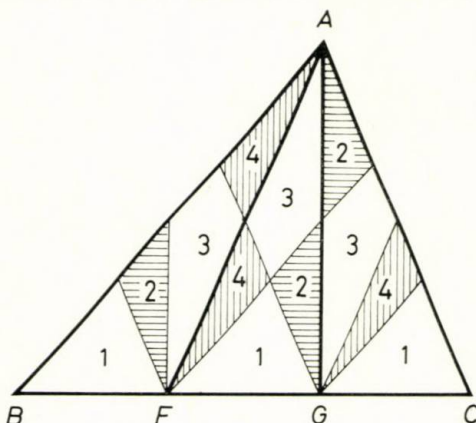
1061. Az ABC nem szimmetrikus háromszög BC oldalának felezőpontja F . Egyenes vágásokkal daraboljuk fel az AFB háromszöget úgy, hogy valamennyi darabjából az AFC háromszöggel egybevágó háromszöget rakhassunk ki! Határozzuk meg a darabok minimumát!

Megoldás: Az F ponton át húzzunk párhuzamosokat az AB és AC oldalakkal. A megfelelő oldalakon levő metszéspontokat jelölje rendre D és E (3. ábra). Az FD és FE szakaszok az ABC háromszög középvonalai, ezért BFD és FCE háromszögek egybevágók, hiszen megfelelő oldalaik páronként egyenlők. Ugyanezért az AFE és az FAD háromszögek is egybevágók. Az AFC háromszöggel egybevágó háromszöget rakhatunk ki tehát az FD vágással adódó BFD és FDA háromszögekből, azaz a darabok számának minimuma: 2.

A 4. ábra a feladat egy „általánosítását” mutatja. Az ABC háromszög BC oldalának harmadoló



3. ábra



4. ábra

pontjai F és G . Egyenes vágásokkal daraboltuk fel az AFB háromszöget úgy, hogy valamennyi darabjából mind az AFG mind az AGC háromszöget kirakhassuk. ($AB \parallel PF \parallel RG$; $AC \parallel NG \parallel LF$; $FM \parallel AG$; $GQ \parallel AF$.) Az azonosan számozott sokszögek egybevágók. Az eljárás további általánosítása — BC oldal n -edelő pontjaira — nehézkes.

Dezső Gábor, Kolozsvár

Megjegyzés: Bolyai Farkas átdarabolási tételének V. F. Kagantól származó bizonyításában szerepel két sokszög egymásba darabolhatóságának igazolása, ha mindkét sokszög egy harmadikba átdarabolható. A 4. ábra ennek az eljárásnak háromszögekre való alkalmazása. Az AFB háromszöget az FM vágással, az AGC háromszöget a GQ szakasszal daraboljuk olyan háromszögekre, amelyekből az AFG háromszög kirakható. Ha az AFG háromszögben egyesítjük mindkét felbontás osztásvonalait, akkor ezek mind az AFB , mind az AGC háromszög darabjaival egybevágó darabokat további darabokra bontják. Ezeket az osztásvonalakat rajzoltuk át a két „szélső” háromszög darabjaiba.

Ily módon az AFB és AGC háromszögeket egybevágó sokszögekre bontottuk. Ez az az eljárás, amelynek általánosítása nehézkes, ugyanis n növekedtével a darabok száma rohamosan nő, s ez kissé áttekinthetetlenné teszi az ábrát. Az eljárás lényege: az $A_1, A_2, \dots, A_n$ osztópontok mindegyikében párhuzamosokat kell állítani az AA_i ($1 \leq i \leq n$) és az AB, AC egyenesek mindegyikével.

A megoldók száma: 25.

1062. Oldjuk meg a

$$2^{3x+2} + a^2 3^{3x} = 2^x \cdot 3^{2x+1}$$

egyenletet, ahol a adott valós szám!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: A $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ helyettesítéssel a

$$4y^3 - 3y + a^2 = 0 \quad (1)$$

egyenlet pozitív valós gyökeit keressük. Először megállapítjuk ezeknek a gyököknek a számát az a függvényében. Evégből a

$$z \mapsto f(z) = 4z^3 - 3z + a^2 \quad (2)$$

függvény menetét vizsgáljuk. Mivel $f'(z) = 12z^2 - 3$, így szélső értékei a $z_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ helyeken lehetnek. Míthogy pedig $f''(z) = 24z$, így (2)-nek a $z_1 = -\frac{1}{2}$ helyen lokális maximuma, a $z_2 = \frac{1}{2}$ -nél lokális minimuma van! Szélső értékei rendre $a^2 + 1$, $a^2 - 1$.

Továbbá $f'(0) = f''(0) = 0$ de $f'''(0) \neq 0$ folytán a $(0; a^2)$ pont inflexió pont. Nem nehéz belátni ezeken kívül, hogy a függvénygörbe az inflexió pontra centrálszimmetrikus. Eddigiekből megállapítható, hogy a különböző a^2 -ekhez tartozó függvénygörbéket a $z \mapsto 4z^3 - 3z$ képből (mikoris az inflexió pont az origó!) $f(z)$ -tengely menti pozitív irányú, a^2 mértékű eltolással kaphatjuk. Így tehát (az 5. ábra alapján) (1)-nek

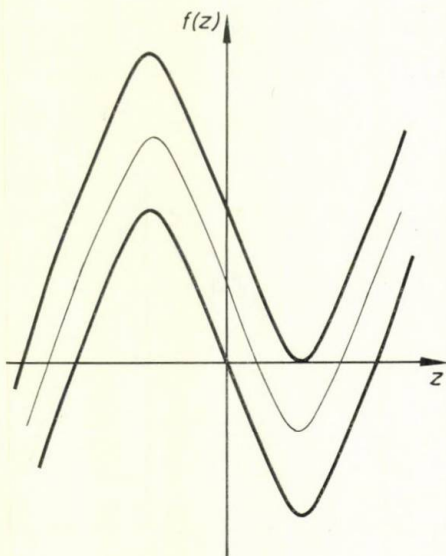
$|a| > 1$ esetén nincs pozitív zéróhelye,

és $\left. \begin{matrix} a = 0 \\ |a| = 1 \end{matrix} \right\}$ esetben pontosan

1 pozitív zéróhelye van,

a $0 < |a| < 1$ esetén pedig

2 pozitív zéróhelye van.



5. ábra

Ezek figyelembevételével (1) pozitív gyökei:
 $a=0$ esetben egyszerű számolás után kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sqrt[3]{3}}{2},$$

$|a|=1$ esetén (amint az ábráról könnyen leolvasható, de behelyettesítéssel is meggyőződhetünk)

$$y = \frac{1}{2},$$

végül a $0 < |a| < 1$ esetben

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{a^4 - 1}{64} = \frac{(a^2 - 1) \cdot (a^2 + 1)}{64} < 0$$

miatt a casus irreducibilis esete forog fenn. Ez esetben a gyökök:

$$y_k = \cos \left[\frac{\arccos(-a^2)}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right] \quad (k = 0; 1; 2) \quad (3)$$

alakban fejezhetők ki. Közülük tehát 2 mindig pozitív. Észrevehető, hogy a (3)-képlet mindhárom esetben alkalmas (1) gyökeinek meghatározására.

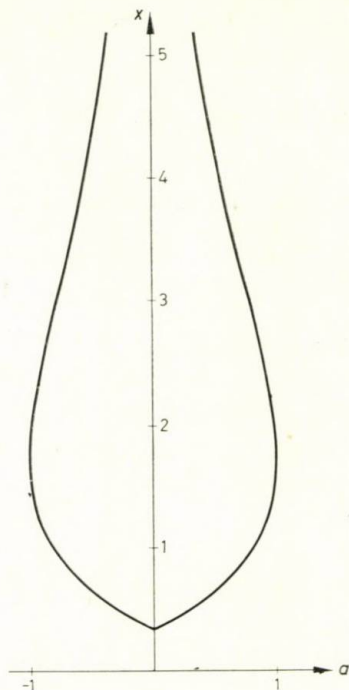
Fentiek alapján az eredeti egyenletnek

$|a| > 1$ esetén nincs megoldása,

$|a| \leq 1$ esetén pedig (1)-re és (3)-ra tekintettel, a gyököket az

$$x_k = \frac{\log \cos \frac{\arccos(-a^2) + 2k\pi}{3}}{\log 2 - \log 3} \quad (k = 0; 1; 2)$$

képlet szolgáltatja.



6. ábra

Boda Miklós, Pécs;
 Halász Ágnes, Budapest

Megjegyzés: Célszerűnek látszik az x_k megoldásokat az a paraméter függvényében ábrázolni. Evégből készült a 6. ábra.

Hajna János, Pécs

A megoldók száma: 29.

1063. Legyenek p és q ($p < q$) ikerprímek. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{q-1}}{p!(q+1)} \cdot \prod_{k=1}^q (2k-1)$$

természetes szám!

Bíró Béla, Barót

Megoldás: $p = q - 2$, mivel ikerprímek. Kifejezésünket alakítsuk át úgy, hogy bővítsük a $\prod_{k=1}^q 2k$ szorzattal. Ekkor

$$\prod_{k=1}^q (2k-1) \cdot \prod_{k=1}^q (2k) = (2q)! \quad \text{és} \quad \prod_{k=1}^q (2k) = 2^q \cdot q!$$

miatt

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{q-1}}{p!(q+1)} \cdot \prod_{k=1}^q (2k-1) = \frac{1}{6} \frac{(2q)!}{(q-2)!(q+1)!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2q)!}{(q-1)!(q+1)!} \cdot (q-1),$$

ahol $\frac{(2q)!}{(q-1)!(q+1)!} = \binom{2q}{q-1}$ a $(q-1)$ -edik binomiális együttható, amely természetes szám.

A $\frac{q-1}{6}$ szintén természetes szám, ha $q \geq 7$, mivel $q-2$ és q 3-nál nagyobb prímek, s így $q-1$

páros és hárommal osztható. Egyetlen eset maradt még: a $p=3$, $q=5$, erre azonban kifejezésünk

$$\frac{4}{6} \binom{10}{4} = 140,$$

ami természetes szám.

Giczi Margit, Sümeg;
Kondor Judit, Budapest

Megjegyzés: A bizonyítás során p és q -ról csak annyit használtunk fel, hogy ha $p \geq 5$, akkor $p=6k-1$ és $q=6k+1$ ($k \geq 1$, egész) alakú kell legyen. Ennél fogva igaz az állítás minden $q=6k+1$ ($k \geq 1$) természetes számra, azaz

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{q-1}}{(q-2)!(q+1)} \prod_{l=1}^q (2l-1)$$

is természetes szám.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 22.

1064. Határozzuk meg az alábbi sor határértékét:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{6^k}$$

Székely Jenő, Budapest

I. megoldás: A feladatbeli sor így is írható:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{6^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{6^{n+2}} = \frac{1}{36} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Numerikus sorunk helyett vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

hatványsort. A hányados — kritérium alapján

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n(n+1) \cdot x_0^n}{n(n-1) \cdot x_0^{n-1}} = \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot x_0 \rightarrow x_0,$$

a hatványsor tehát az $|x_0| < 1$ helyeken konvergens. A hatványsor összegfüggvénye a konvergencia-intervallum belsejében differenciálható és deriváltja a tagonkénti deriválással kapott sor összege.

A $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ sort a $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ sornak, a $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ sort pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ sornak tagonkénti differenciálásával kapjuk, így

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(x^{n+1})' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} \right)' = (x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1})' = (x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)')' = \\ &= (x^2 (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)')' = \left(x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)' \right)' = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2x(1-x)^2 + 2(1-x)x^2}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Ennek birtokában a numerikus sor összege:

$$\frac{1}{36} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{36} \frac{2 \cdot \frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{2}{125} = 0,016.$$

Kamarás Lajos, Pécs

II. megoldás: Legyen

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad (|x| < 1).$$

Ebből — az előbbi megoldásban indokoltan —:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

és

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ezért

$$x^3 S''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k+1} = \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2)x^k = \frac{2x^3}{(1-x)^3},$$

ha $|x| < 1$. Az $x = \frac{1}{6}$ -ra az adott sor összegét kapjuk: $\frac{2}{125}$.

Róka Sándor, Tiszavasvári

III. megoldás: Tekintsük az adott sor részletösszeg-sorozatának

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)(k-2)}{6^k}$$

általános tagját. Számolással könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezt még az

$$s_n = \sum_{k=3}^n (a_k - a_{k-1})$$

alakban is felírhatjuk, ahol

$$a_k = \frac{-\frac{1}{5}k^2 + \frac{3}{25}k - \frac{2}{125}}{6^k}.$$

De ezzel

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=3}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_2 = \frac{-\frac{1}{5}n^2 + \frac{3}{25}n - \frac{2}{125}}{6^n} - \frac{-\frac{4}{5} + \frac{6}{25} - \frac{2}{125}}{6^2} = \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{n^2}{6^n} + \frac{3}{25} \cdot \frac{n}{6^n} - \frac{2}{125} \cdot \frac{1}{6^n} + \frac{2}{125}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $a > 1$ és tetszőleges k valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

kapjuk

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{6^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{2}{125}.$$

Biró László, Székelyudvarhely

IV. megoldás: Jelölje S a feladatbeli sor összegét.

Mivel

$$6S = \frac{6}{108} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)}{6^k} = \frac{1}{18} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)}{6^k}$$

és

$$36S = \frac{36}{108} + \frac{36}{216} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k+1)k}{6^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k+1)k}{6^k},$$

ezért, ha van olyan α, β, c számhármass, hogy

$$(k-1)(k-2) + \alpha(k-1)k + \beta(k+1)k = c$$

teljesül minden k -ra, akkor S egy végtelen mértani sor összegéből határozható meg.

A fenti egyenlőséget átalakítva:

adódik, amiből

$$(1 + \alpha + \beta)k^2 + (\beta - \alpha - 3)k + 2 = c$$

$$1 + \alpha + \beta = 0,$$

$$\beta - \alpha - 3 = 0,$$

$$2 = c$$

kell legyen. Ennek viszont $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $c = 2$ a megoldása, amivel

$$S - 12S + 36S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{6^k} - \frac{2}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{7}{18} = \frac{2}{36 \cdot 5} + \frac{7}{18} = \frac{36}{18 \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

Így

$$25S = \frac{2}{5}, \text{ vagyis } S = \frac{2}{125}.$$

Halász Ágnes, Budapest

Megjegyzés: A

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad (|x| < 1)$$

sort a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ sor n -szer egymás utáni deriválásából nyerjük, tehát

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1)x^{k+1} = \frac{n!x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Ebből az $n=2$, $x=\frac{1}{6}$ választásra eredeti feladatunkat nyerjük.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók névsora (1059—1064.)

Ambrus Gabriella, Budapest (1059., 1061—1063.); Bagi Gábor, Barcs (1059., 1060); Bencze Mihály, Brassó (1059., 1060., 1062—1064.); Biró Béla, Barót (1059—1064.); Biró László, Székelyudvarhely (1059—1064.); Boda Miklós, Pécs (1059., 1062., 1064.); Bokor József, Szeged (1059. 2 mód, 1061., 1062); Burus Árpád Csaba, Székelyudvarhely (1059. 2 mód, 1060—1063., 1064. 2 mód); Cseh László, Kolozsvár (1059. 3 mód., 1060., 1061. 3 mód, 1062—1064.); Csorba Ferenc, Győr (1059—1064.); Dezső Gábor, Kolozsvár (1059., 1060. 2 mód, 1061—1064.); Fehér József, Csongrád (1059—1062., 1064.); Giczi Margit, Sümeg (1059., 1063.); Hajna János, Pécs (1059., 1060., 1062., 1064.); Halász Ágnes, Budapest (1059—1062., 1064.); Hornyák Pál, Érsekújvár (1059—1061., 1063.); Horváth Géza, Zseliz (1059); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1059—1064.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1059. 2 mód, 1060., 1062., 1064. 2 mód); Kamarás Lajos, Pécs (1059—1064.); Kondor Judit, Budapest, (1059., 1060., 1063., 1064.); Kondor László, Dunaujváros (1062.); Körtesi Péter, Marosvásárhely (1059—1062.); Kulcsár Károlyné, Szücsi (1059.); Dr. Major Pál, Budapest (1059.); Merényi Imre, Kolozsvár (1059—1063.); Mészáros József, Galánta (1059—1064.); Mészáros Mihály, Hejőkeresztúr (1059., 1061., 1062., 1064.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (1063.); Nagy-Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (1059., 1060., 1062.); Nyíró László, Mezőkövesd (1059., 1060., 1063.); Pataki János, Szatmár (1059—1062., 1064.); Polcz Katalin, Pécs (1059., 1060., 1062.); Rischák Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1059., 1060., 1064.); Róka Sándor, Tiszavasvári (1059., 1060., 1063., 1064. 3 mód); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (1062); Schutzbach Mártonné, Siófok (1059., 1061., 1062.); Sebestyén László, Budapest (1060., 1062); Simon József, Csíkszereda (1059., 1061); Spissich László, Pápa (1059. 2 mód., 1060., 1061., 1063., 1064.); Szánthó Gyula, Gyula (1059—1062.); Tóth István, Gyula (1059., 1060.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1059., 1060., 1062—1064.); Udvari Tibor, Baja (1059—1064.); Varga István, Nagyszalonta (1059., 1060. 2 mód, 1061—1064.); Zábrádiné Schmierer Emilia, Győr (1059., 1060.); Zalán Péterné, Budapest (1059., 1061.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1059—1061., 1063., 1064.).

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565